Командна усна олімпіада

Молодша ліга

1. Уздовж кола записані декілька чисел. Відомо, що серед добутків сусідніх чисел є рівно 5 від'ємних. Чому дорівнює добуток усіх чисел, що записані вздовж кола?

2. У Кролика вкрали діжку меду. Він запідозрив, що це міг зробити хтось із тих, хто напередодні був у нього в гостях – Іа, Вінні-Пух, П'ятачок та Тигра. Можливо, що крадіжку скоїли відразу декілька гостей. Достеменно відомо, що:

1) хтось з переліченої четвірки обов'язково винен;

2) Якщо П'ятачок винен, то лише у парі з Вінні-Пухом;

3) якщо Іа винен, то у нього повинно бути ще 2 співучасники;

4) якщо винен Тигра, то у нього повинен бути ще рівно 1 співучасник.

Хто з гостей безумовно брав участь у крадіжці?

3. Задано дві різні точки A та B. Вкажіть усі можливі розташування (ГМТ) точок C, для яких у трикутнику ABC сторона AB буде найменшою з усіх трьох сторін.

4. Два гравці грають у таку гру на шахівниці 8×8 – у кожного з них є фішка, фішки гравців стоять у протилежних кутах дошки. Вертикаль та горизонталь, на яких стоїть фішка одного з гравців, є забороненими для ходу іншого гравця. Кожним своїм ходом гравець повинен пересунути свою фішку у сусідню вздовж сторони клітину, якщо він може це зробити. Програє той, хто не може зробити хід. Хто виграє за правильної гри?

5. Для яких натуральних n із сукупності чисел $1, 2, \ldots, n-1$ можна вибрати кілька різних парних чисел, сума яких ділиться на n?

6. Нехай P – довільна точка всередині триктуника ABC. Позначимо через P_a, P_b та P_c точки, які симетричні точці P відносно середин сторін BC, CA та AB відповідно. Довести, що прямі AP_a, BP_b та CP_c перетинаються в одній точці.

7. Знайти всі пари натуральних чисел (m, n), які є розв'язками рівняння $m! + n! = m^n$.

8. Нехай $b, n > 1$ – натуральні числа. Припустимо, що для кожного $k > 1$ існує ціле a_k, таке що $b - a_k^n$ ділиться без остачі на k. Довести, що b є n-м степенем деякого цілого числа.

Середня ліга

1. Задача № 4 молодша ліга
2. Задача № 5 молодша ліга
3. Задача № 6 молодша ліга
4. Задача № 8 молодша ліга

5. У прямокутну трапецію $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD \perp AB$, вписане коло з центром у точці O, яке дотикається до сторони CD в точці Q, $T = AC \cap BD$. Нехай P – точка перетину прямої CD та кола, що проходить через точки T, Q, O, що відмінна від точки Q. Довести, що $TP \parallel AD$.

6. Розв'язати в дійсних числах систему рівнянь:

$$\begin{cases} a\sqrt{b} - c = a, \\ b\sqrt{c} - a = b, \\ c\sqrt{a} - b = c. \end{cases}$$

7. Натуральне число z називається десятковим паліндромом, якщо його десяткове представлення $Z = \overline{z_n z_{n-1} \ldots z_1 z_0}$, де $z_n \neq 0$, має властивість: $z_k = z_{n-k}$ для всіх $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Довести, що для кожного натурального z, яке не ділиться на 10, існує десятковий паліндром, який ділиться на z.

8. Знайти всі функції $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, які задовольняють такі дві умови для довільних натуральних m, n:

1) $f(n)$ є повним квадратом;

2) $f(m+n) = f(m) + f(n) + 2mn$.

Старша ліга

1. Задача № 8 молодша ліга
2. Задача № 5 середня ліга
3. Задача № 6 середня ліга
4. Показати, що якщо додатні числа x, y, z задовольняють умову $x + y + z = 1$, то

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \geq 64.$$

5. Задача № 7 середня ліга
6. Вписане в трикутник ABC коло дотикається до сторін BC, AC та AB трикутника в точках A_1, B_1 та C_1 відповідно. Нехай l – довільна пряма, що проходить через інцентр I, точки A_2, B_2, C_2 симетричні точкам A_1, B_1, C_1 відносно прямої l. Довести, що прямі AA_2, BB_2 та CC_2 перетинаються в одній точці.
7. Задача № 8 середня ліга
8. Розглянемо шахову дошку $n \times n$, $n > 1$. Вибираємо $(2n - 2)$ квадрати таким чином, щоб жодні два не лежали вздовж однієї діагоналі. У скільки способів це можна зробити?

Командна усна олімпіада

Молодша ліга

1. ***Відповідь:*** 0.

Розв'язання. Припустимо, що серед записаних чисел немає 0. Тоді всі числа додатні та від'ємні. Від'ємним може виявитись добуток лише пари чисел, серед яких одне додатне, а інше від'ємне.

Розглянемо групу від'ємних чисел (не менше від одного), що йдуть поспіль, тоді їх оточують додатні числа і серед усіх сусідніх добутків у цій групі з урахуванням додатних ми маємо рівно 2 від'ємні добутки. Таким чином, загалом буде парна кількість від'ємних добутків. Тобто, 5 від'ємних добутків може бути лише при наявності принаймні одного нуля, що записаний поруч із від'ємним числом. Наприклад, якщо числа записані таким чином (останнє число межує вздовж кола з першим): $-1, 1, -1, 1, -1, 1, 0$. Але тоді зрозуміло, що добуток усіх чисел дорівнює нулеві.

2. ***Відповідь:*** Вінні-Пух.

Розв'язання. Усі четверо не могли брати участь у крадіжці, бо це суперечить умові 4).

Якщо крали утрьох, то з умови 4) серед них не повинен бути Тигра, звідки випливає, що були усі крім нього, що не суперечить іншим умовам.

Якщо крали двоє, то Іа серед них не було, якщо був П'ятачок, то був і Вінні-Пух, якщо П'ятачка не було, то тим паче був Вінні-Пух.

Нарешті, якщо крав хтось один, то це міг бути тільки Вінні-Пух.

Висновок – якщо крала компанія з будь-якої кількості гостей, то серед них обов'язково був Вінні-Пух, тому він точно винен. Нікого, крім Вінні-Пуха, звинуватити у крадіжці не можна, адже крадіжку справді міг здійснити він один.

3. ***Розв'язання.*** Побудуємо два круги k_1 та k_2 з центрами в точках A та B відповідно та з радіусами, що дорівнюють AB. Пряму AB позначимо через l, тоді шуканим ГМТ буде та частина площини, що не попадає всередину чи на межу кругів k_1 та k_2, а також не лежить на прямій l. Це зрозуміло, бо якщо вершина C лежить у вказаній області, то з умови, що вона зовні k_1 випливає, що $CA > AB$, аналогічно, з умови, що вона зовні k_2 випливає, що $CB > AB$, тобто відрізок AB є найменшим з трьох відрізків AB, BC, CA. Умова, що точка C не лежить на прямій l, необхідна для існування триктуника ABC.

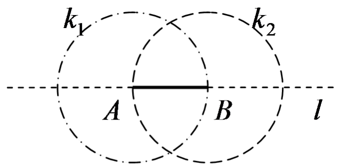

Рис.001

4. ***Відповідь:*** виграє другий гравець.

Розв'язання. Виграє другий гравець. На початку гри обидві фішки стоять на чорних полях (без обмеження загальності ми можемо так уважати). Після ходу першого вони стають на поля різного кольору, тоді другий завжди може зробити хід «назустріч» першому, тобто зменшити відстань між фішками. Дійсно, фішки не можуть стояти в одному рядку, тому між ними або по вертикалі, або по діагоналі є принаймні 2 рядки, і другий гравець може походити назустріч супротивнику. Навпаки, після ходу другого, коли фішки опиняться максимально близько одна від іншої (просто в сусідніх по діагоналі клітинах), першому гравцю доведеться відступати, і він буде загнаний у кут, де вже немає куди відступати – тоді в нього не буде ходу.

5. ***Відповідь:*** $n \geq 8$ та $n = 6$.

Розв'язання. Спочатку переконаємось, що при $n < 6$ та $n = 7$ розв'язків не існує. Це можна зробити простим перебором. Наприклад, при $n = 7$ маємо набір чисел $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Оскільки ми вибираємо лише парні числа, то сума буде парною, а тому для подільності на непарне число $n = 7$ треба мати суму щонайменше 14. Але сума всіх парних чисел, що записані, менша від цього числа. Так само перевіряється неможливість при інших n.

Тепер розглянемо два випадки.

1-й випадок. $n = 2k$ – парне. Тоді числа 2 та $2k - 2$ дають шукану суму $2 + (2k - 2) = 2k = n$. При цьому вони різні, оскільки при $n \geq 6$ маємо $2k - 2 = n - 2 > 2$.

2-й випадок. $n = 2k+1$ – непарне. Тоді виберемо числа 4, $2k-2$, $2k$: $4+(2k)+(2k-2) = 4k+2 = 2n$. Числа різні, оскільки при $n \geq 9$ маємо $2k-2 = n-3 > 4$.

6. ***<u>Розв'язання.</u>*** Позначимо через M_a, M_b та M_c середини відповідних сторін $\triangle ABC$. Вони одночасно також і середини відрізків PP_a, PP_b, PP_c, тому маємо паралелограми $APBP_c, CPAB_p, BPCP_a$. Тобто, відрізки AP та BP_c рівні та паралельні. Аналогічне стосується й пари відрізків AP та CP_b. Тому P_bP_cBC – паралелограм, його діагоналі перетинаються в серединах. Але тоді середини усіх цих відрізків AP_a, BP_b та CP_c повинні збігатися, що й треба було довести.

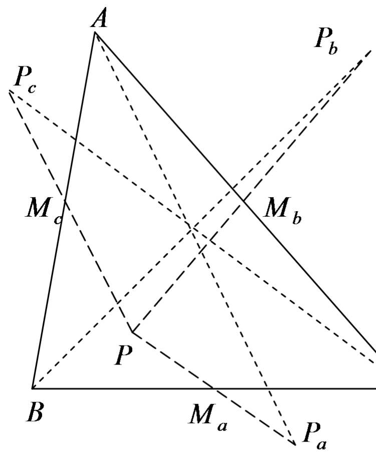

Рис.G-010

7. ***<u>Відповідь:</u>*** $(2,2)$ та $(2,3)$.

<u>Розв'язання.</u> Якщо $m > n$, то вихідне рівняння можна переписати як:

$$n!(1+(n+1)(n+2)\ldots(m-1)m) = m^n,$$

що є суперечністю, оскільки числа m та $1+(n+1)(n+2)\ldots(m-1)m$ взаємно прості.

Таким чином $m \leq n$. Якщо $m > 2$, то задане рівняння можна переписати як

$$(m-2)!(m-1)m(1+(m+1)(m+2)\ldots n) = m^n.$$

Але це також неможливо, бо числа $m-1$ та m взаємно прості. Висновок: $m = 1$ або $m = 2$.

Якщо $m = 1$, ми маємо $1 + n! = 1$ – суперечність.

$m = 2 \Rightarrow 2! + n! = 2^n \Rightarrow$ при $n \geq 4$ маємо $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n > 2^4 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$. Залишається перевірити випадки $n = 2$ та $n = 3$. Простою перевіркою переконуємось, що $(2,2)$ та $(2,3)$ є шуканими розв'язками.

8. ***<u>Розв'язання.</u>*** Покладемо $k = b^2$. Тоді повинні існувати такі цілі a_k та m, для яких виконується рівність: $b - a_k^n = mb^2$, звідки $a_k^n = b(1-mb)$. Зрозуміло, що числа b та $(1-mb)$ взаємно прості та їхній добуток є n-м степенем деякого цілого числа, тому й кожне з них повинне саме бути n-м степенем деякого цілого числа. Це й треба було довести.

<u>Середня ліга</u>

1. Задача № 4 молодша ліга
2. Задача № 5 молодша ліга
3. Задача № 6 молодша ліга
4. Задача № 8 молодша ліга
5. ***<u>Розв'язання.</u>*** Спочатку скористаємось такою лемою.

Лема. Якщо у прямокутну трапецію $ABCD$ з основами $AD = a$ та $BC = b$, $AD \perp AB$, вписане коло радіуса r, то $r = \frac{ab}{a+b}$.

Далі просто знаходимо відстань від точки T до бічної сторони AB, воно в наших позначеннях також дорівнює $\frac{ab}{a+b}$. Тому очевидно, що $TO \parallel AB$. Оскільки $QTOP$ за побудовою вписаний, то $\angle PTO = \angle PQO = 90°$, тобто $TP \perp TO$. Звідси випливає, що $TP \parallel AD$.

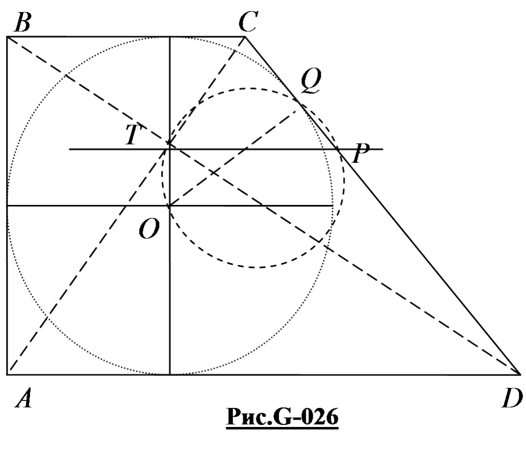

Рис.G-026

6. ***<u>Відповідь</u>***: $(0,0,0), (4,4,4)$.

<u>Розв'язання</u>. З вигляду системи зрозуміло, що невідомі невід'ємні. Якщо, наприклад, $a = 0$, то $b = c = 0$ і маємо перший розв'язок $(0,0,0)$. Нехай тепер $abc \neq 0$. Тоді з першої рівності маємо, що $a(\sqrt{b}-1) = c$, тому $b \geq 1$. З інших рівнянь одержуємо, що й усі інші змінні також не менші від 1.

Тоді, внаслідок циклічності невідомих a, b, c, без обмеження загальності можемо вважати, що $a = \max\{a, b, c\}$. Тоді з першого рівняння одержимо, що

$$c(\sqrt{b}-1) \le a(\sqrt{b}-1) = c \qquad \Rightarrow \qquad b \le 4.$$

З другого рівняння маємо, що

$$b(\sqrt{c}-1) = a \ge b \qquad \Rightarrow \qquad c \ge 4.$$

Тепер використаємо одержані нерівності разом з третім рівнянням системи й одержимо, що

$$4 \le c \le c(\sqrt{c}-1) \le c(\sqrt{a}-1) = b \le 4,$$

звідки зрозуміло, що $b = c = 4$, а тому й $a = 4$.

7. ***Розв'язання.*** Окрім добре відомих тверджень з елементарної теорії чисел, нам буде потрібна така лема.

Лема. Нехай s – натуральне число, яке не кратне ні 2, ні 5, та $Z = \overline{z_{k-1}z_{k-2}\ldots z_1 z_0}$ – послідовність з k цифр, де $z_{k-1} \neq 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Далі нехай Z_i – це послідовність, яка одержана шляхом дописуванням поруч i копій числа Z. Кожне з чисел Z_i кратне Z та принаймні одне з цих кратне s.

Доведення леми. Очевидно, що $Z_i = Z(1 + 10^k + 10^{2k} + \ldots + 10^{(i-1)k})$ кратне Z. Якщо тепер припустити, що серед чисел немає кратних числу s, тоді серед чисел Z_i виберемо два таких, які мають однакові остачі при діленні на s. Нехай це числа Z_m та Z_n, $m > n$. Тоді число $Y = Z_m - Z_n$ ділиться на s. Але число Y – це є запис $(m-n)$ разів числа Z, а далі всі нулі, тобто $Y = Z_{m-n} \cdot 10^{kn}$. Згідно з вибором числа s ми маємо, що Z_{m-n} кратне s. Одержана суперечність завершує доведення леми.

Повернемось до доведення основної частини. Подамо число z як $z = c^r \cdot s$, де $c \in \{2, 5\}$ та числа c, s взаємно прості. Спочатку побудуємо число, яке кратне c^r і є паліндромом. Починаємо з десяткового представлення числа $c^r = \overline{z_{k-1}z_{k-2}\ldots z_1 z_0}$. Ми допишемо зліва достатню кількість нулів, щоб число, яке утворилося, мало принаймні r цифр. Після цього попереду допишемо симетричним чином цифри цього числа, щоб утворився паліндром: $\overline{z_0 z_1 \ldots z_{k-2}z_{k-1}00\ldots 0 z_{k-1}z_{k-2}\ldots z_1 z_0}$. Воно до того ж кратне c^r, оскільки останні r цифр числа утворюють число, яке кратне c^r.

Далі скористаємось лемою, тобто будемо дописувати відповідну кількість разів цей паліндром, доки не одержимо число, яке кратне s. Кожне з написаних чисел і саме є паліндромом, а крім того, число, яке кратне s, буде також кратне й c^r. Із взаємної простоти чисел c та s маємо, що записаний паліндром є кратним z, що й треба було довести.

8. ***Відповідь:*** $f(n) = n^2$.

Розв'язання. Визначимо таку функцію: $g(n) = f(n) - n^2$. Тоді другу умову можна переписати так: $g(m+n) + (m+n)^2 = g(m) + m^2 + g(n) + n^2 + 2mn$, тобто функція g задовольняє $\forall m, n \in \mathbb{N}$ таку умову: $g(m+n) = g(m) + g(n)$. Покладемо $b = g(1) = f(1) - 1 \ge 0$, тоді при $n = 1$ маємо $g(m+1) = g(m) + b$. Далі індукцією легко показати, що $g(n) = nb$, тому $f(n) = nb + n^2$. Тож при $n = b$ $f(b) = 2b^2$ не є повним квадратом, тому залишається єдина можливість $b = 0$, яка дає єдину можливу відповідь: $f(n) = n^2$.

Старша ліга

1. Задача № 8 молодша ліга
2. Задача № 5 середня ліга
3. Задача № 6 середня ліга
4. ***Розв'язання.***

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) = \frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{xyz} =$$

$$= \frac{xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1}{xyz} = 1 + \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) + \frac{2}{xyz}.$$

З нерівності між середніми маємо, що $\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \le \frac{x+y+z}{3} = \frac{1}{3}$, тому $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge 9$, крім того, $1 = x+y+z \ge 3\sqrt[3]{xyz}$, тому $xyz \le \frac{1}{27}$ або $\frac{1}{xyz} \ge 27$, звідки остаточно

$$1+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{2}{xyz} \ge 1+9+2\cdot 27 = 64.$$

5. Задача № 7 середня ліга

6. ***Розв'язання.*** Позначимо через $d_c(X)$, $d_b(X)$, $d_a(X)$ відстані від точки X до прямих c, b, a відповідно. з теореми Чеви у синусній формі неважко показати, що

$$\frac{d_b(A_2)}{d_c(A_2)}\cdot\frac{d_c(B_2)}{d_a(B_2)}\cdot\frac{d_a(C_2)}{d_b(C_2)} = 1$$

тоді і тільки тоді, коли прямі AA_2, BB_2 та CC_2 перетинаються в одній точці.
Очевидно, що $B_1A_2 = B_2A_1$, оскільки прямі CA та CB дотикаються до одного кола, то $\angle B_2A_1B = \frac{1}{2} \smile B_2A_1 = \frac{1}{2} \smile B_1A_2 = \angle A_2B_1C$, тому $d_a(B_2) = A_1B_2 \sin\angle B_2A_1B = A_2B_1 \sin\angle A_2B_1C = d_b(A_2)$. Аналогічно, $d_a(C_2) = d_c(A_2)$ та $d_b(C_2) = d_c(B_2)$, звідки й випливає потрібна рівність.

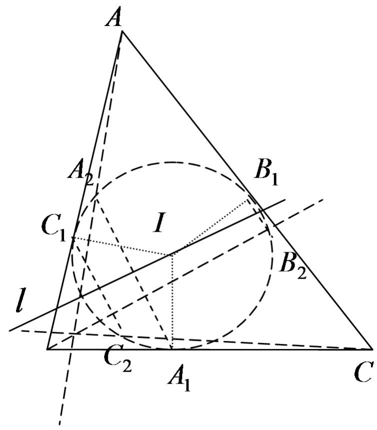

Рис.G-049

7. Задача № 8 середня ліга

8. ***Відповідь:*** 2^n.

Розв'язання. Спочатку зрозуміємо, що в нашому випадку при стандартному розфарбуванні шахової дошки половина клітин вибирається на білих, а половина – на чорних діагоналях. Дійсно, якщо розглянути діагоналі одного напряму, їх усього $(2n-1)$, але дві кутові клітини утворюють дві діагоналі, які не можуть бути зайнятими одночасно, оскільки вони самі лежать на одній діагоналі протилежного кольору. Назвемо k-діагоналлю таку діагональ, яка містить рівно k клітин.

Тепер почнемо рахувати варіанти заповнення. Вибираємо напрямок діагоналі, наприклад, зліва знизу направо нагору. Тоді для двох кутових клітин є 2 варіанти вибору. Виберемо, наприклад, квадрат зліва нагорі, як показано на рис. 2 (обрані квадрати будемо робити темними). На наступній 2-діагоналі ми маємо дві клітини, тобто знову вибір з 2 варіантів. Але тепер розглянемо ще й іншу (знизу) 2-діагональ. На цій діагоналі можна вибрати клітину однозначно. Далі йде 3-діагональ, що складається з трьох клітин, але знову маємо вибір лише з 2 варіантів, оскільки одна клітина зайнята, якщо враховувати найбільшу діагональ протилежного напряму, на якій стоїть кутова клітина. Тоді знову однозначно заповнюється інша 3-діагональ. І взагалі, далі легко побачити, що у кожній наступній k-діагоналі вільними, з урахуванням діагоналей протилежного напряму, є лише дві крайні клітини. Це легко довести ММІ.

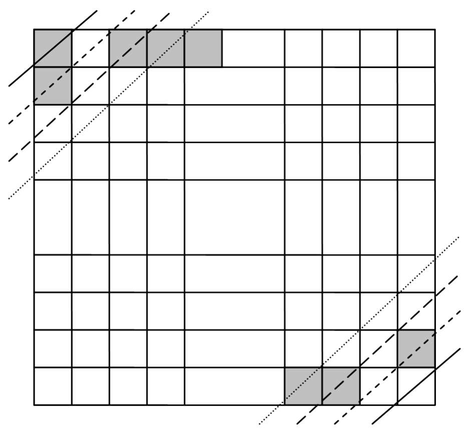
Рис.

Таким чином, на цій діагоналі можемо вибрати лише у 2 способи, а на аналогічній k-діагоналі з протилежного боку – однозначно. Зрештою дійдемо до найбільшої діагоналі, на якій знову маємо вибір з 2 варіантів. Таким чином, маємо відповідь: 2^n.