

## Підготовка до міської олімпіади

1. Прямокутник розміром  $2010 \times 11$  розбито на одиничні квадратики. Зовнішній шар клітин товщиною у 1 клітину цього прямокутника пофарбовано у жовтий колір, шар клітин товщиною у 1 клітину, що межує із зовнішнім шаром, пофарбовано у блакитний колір. Наступний шар клітин, що межує з блакитним пофарбовано у жовтий колір і так далі. Знайдіть кількість жовтих та блакитних клітин у цьому прямокутнику.
2. При яких  $x$  значення функції  $y = (\sqrt{x})^{2013} + (\sqrt{1-x})^{2014}$  є цілим числом?
3. У гострокутному трикутнику  $ABC$  точка  $O$  — центр описаного кола,  $CH$  — висота трикутника, точка  $T$  — основа перпендикуляра, що опущений з вершини  $C$  на пряму  $AO$ . Доведіть, що пряма  $TH$  проходить через середину сторони  $BC$ .
4. Доведіть, що для будь-якого  $n \geq 3$  із множини  $n, n+1, n+2, \dots, n^2$  можна вибрати 4 різні числа  $a, b, c, d$  такі, що

$$ab = cd$$

5. Розглянемо чотирицифрове число, а також чотирицифрове число, записане такими самими цифрами тільки в зворотньому порядку. Яку найбільшу кількість цифр 5 може мати у своєму десятковому запису модуль різниці цих чисел?
6. У гострокутному трикутнику  $ABC$  кут  $\angle B = 30^\circ$ , точка  $H$  — точка перетину його висот. Позначимо через  $O_1; O_2$  центри кіл, вписаних у трикутники  $ABH$  та  $CBH$  відповідно. Знайдіть у градусах величину кута між прямими  $AO_2$  та  $CO_1$ .
7. На дошці записано 16 послідовних натуральних чисел. Андрійко підрахував добуток записаних чисел, а Олеся — суму. Чи могло так трапитись, що у Андрійка та Олесі співпали три останні цифри результату? Чотири останні цифри результату?