Комбінаторика: повторення. 9 клас

1. Дошку 4*4 заповнюють 0 та 1. Скількома способами це можна зробити так, щоб добуток в довільній доміношці (прямокутник 1*2 або 2*1) був рівний 0.
2. Є n книг, що лежать одна на одній. i-тий крок полягає в тому, що перевертають верхніх $(i \bmod \mathrm{n})$ книжок (перевертається вся стопка, тобто порядок змінюється на протилежний). Довести, що колись настане момент, що всі книги знову лежатимуть так, як лежали.
3. Всі клітинки таблиці $n*n$ пофарбовані в білий або чорний кольори. До межі таблиці прилягає не манше n білих та n чорних клітинок. Довести, існує не менше n різнокольорових доміношок.
4. В дошці $(2k+1)*(2l+1)$ записано різні числа. Число називається хорошим, якщо воно найбільше в своєму рядку або стовпчику або воно середнє в своєму рядку або стовпчику. Яка найбільша можлива кількість хороших чисел?
5. Нехай $0 \le a_1 \le a_2 \le ... \le a_{2014}$ - цілі невід'ємні числа. Якщо при цьому виконано $a_k \le k-1$, то така послідовність називається хорошою. А) Довести, що хороших послідовностей не менше ніж 2^{2013}. Б) порахувати кількість хороших послідовностей.
6. На клітчатій площині введено систему координат. Порахувати кількість неперетинних шляхів (послідовність кроків «вверх» або «вправо») з точок $(0,-n)$, $(0,-n-1)$ в точки $(n,0)$, $(n+1,0)$, відповідно. Порахувати кількість неперетинних шляхів з $(0,-n)$, $(0,-n-1)$, $(0,-n-2)$ в точки $(n,0)$, $(n+1,0)$ та $(n+2,0)$ відповідно.
   Вказівка: згадайте ідею, як рахувалися шляхи Каталана.
7. Порахувати суму: а) $\sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k}$ б) $\sum_{k=0}^{n} (C_k^n)^2$ в) $\sum_{k=0}^{m} (s-k) C_s^k C_{n-s}^{m-k}$
8. Знайти кількість послідовностей цілих чисел $a_0, a_1, ..., a_n$, які задовольняють такі умови $a_0 = 0$, $a_k \le a_{k-1} + n$, $a_k + a_{k-2} \ge 2a_{k-1}$ для $k \ge 1$.
9. Знайдіть кількість шляхів з $(0,0)$ в $(2n,2n)$, що ідуть лише вверх та врпаво та не проходять через точки виду $(2k-1, 2k-1)$.
10. Довести тотожність: $\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k C_n^{k+1} = nC_n$, де C_n - n-те число Каталана.
11. В вершині A п'ятикутника $ABCDE$ сидить жаба, яка за один крок стрибає в сусідню вершину. Знайти кількість способів жабі за n кроків опинитися в вершині C.
12. Знайти кількість способів замостити $3*2n$ доміношками.
13. Знайти кількість слів довжини n записаних літерами a, b, c так, що a та b ніколи не стоять поруч.
14. Знайти суму найбільших непарних дільників перших 2^n натуральних чисел.

15. Назвемо множину натуральних чисел товстою, якщо кожен її елемент не менший ніж потужність множини. (порожня множина вважається товстою). Знайти кількість товстих підмножин множини $\{1, 2, .., n\}$.
16. Назвемо множину натуральних чисел самодостатньою, якщо вона містить число, яке рівне кількості чисел в самій множині. Знайти кількість самодостатніх підмножин множини $\{1, 2, ..., n\}$. Назвемо самодостатню множину мінімальною, якщо довільна її власна підмножина не є самодостатньою. Знайти кількість мінімальних самодостатніх множин.
17. k - натуральне. Означимо $a_0 = a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+3} = a_{n+1} + ka_n$, для всіх $n \geq 0$. Довести, що $a_{2n-1} = 2a_n a_{n+1} + ka_{n-1}^2$.
18. $t_0 = a$, $t_n = nt_{n-1} + b(n!)$, для $n > 0$. Знайти явну формулу для t_n.
19. Довести, що для кожного натурального n число $\frac{5+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(3+\sqrt{3})^n - \frac{5-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(3-\sqrt{3})^n$ - ціле.
20. Доведіть, що число $a_1x_1^n + a_2x_2^n + ... + a_mx_m^n$ буде цілим для кожного натурального n, якщо відомо, що $a_1x_1^k + a_2x_2^k + ... + a_mx_m^k$ буде цілим, для $0 \leq k \leq m-1$, та цілими є $x_1 + x_2 + ... + x_n$, $x_1x_2 + x_1x_3 + .. + x_1x_m + x_2x_m + .. + x_{m-1}x_m$, ..., $x_1x_2...x_n$ (тобто суми всіх можливих добутків по k елементів).
21. Доведіть, що серед довільних $2n+1$ різних цілих чисел, які по модулю не перевищують $2n-1$ знайдуться 3, сума яких рівна 0.
22. На колі відмічено 100 точок $A_1, .., A_{100}$. Яких опуклих многокутників з вершинами в даних точках більше, тих, серед вершин яких є точка A_1, чи всіх інших? На скільки?
23. Доведіть, що серед n-цифрових чисел записаних 1 та 2 неможливо обрати більше ніж $2^n / (2n+1)$ чисел, кожні 2 з яких відрізнялися б не менше як в 3-х розрядах.
24. На дошці написане $2n+1$-цифрове число. Довести, що в ньому можна викреслити одну цифру так, що кількість сімок на непарних місцях буде рівна кількості сімок на парних місцях.
25. З двох точок заданих на площині дозволяється отримати третю – симетричну одній з них відносно другої. Чи можна такими операціями за скінченну кількість кроків з трьох вершин квадрата отримати четверту.
26. Під Києвом є закинуте поле 10*10 поділене на одиничні квадратики. В 2013 році рівно 9 квадратів були заражені бур'яном. Кожного наступного року квадрат стає зараженим бур'яном або якщо він був заражений минулого року, або якщо 2 з його сусідів по стороні були заражені минулого року. Чи може все поле зарости бур'яном?