Біноміальні коефіцієнти

„Коли йому [Моріарті] виповнився двадцять один рік, він написав трактат про біноміальну теорему, що приніс йому європейську славу. Це дозволило йому одержати кафедру математики в одному з наших провінційних університетів.“

– *Ш. Холмс*

$C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ — кількість способів вибрати k -елементну підмножину із n -елементної множини. Пам'ятаємо, що $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$. І найголовніше:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

`Так ось ти який, біном Ньютона! А знайомі із прекрасною грецькою літерою Σ зможуть переписати вищенаведену формулу як:`

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k.$$

`Одержіть цю формулу хоча б двома способами.`

Намагайтеся по можливості шукати комбінаторний зміст в задачах.

Довести тотожності:

1. $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$.
2. $C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$.
3. $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.
4. $C_n^k \cdot C_k^m = C_n^m \cdot C_{n-m}^{k-m}$.
5. $C_{n+m}^k = C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \dots + C_n^k C_m^0$ — згортка Вандермонда.
6. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \dots + C_{k-1}^{k-1}$.
7. $C_{n+k+1}^k = C_n^0 + C_{n+1}^1 + \dots + C_{n+k}^k$.
8. $C_{n-1}^{k-1} \cdot C_n^{k+1} \cdot C_{n+1}^k = C_{n-1}^k \cdot C_n^{k-1} \cdot C_{n+1}^{k+1}$ — тотожність шестикутника. (Подумайте, чому вона така називається).

Обчислити суми:

9. $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2$.
10. $1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + \dots + n \cdot C_n^n$.
11. Довести, що число $\dfrac{(m+n+k)!}{m!n!k!}$ — ціле.
12. Нехай p — просте і $0 < k < p$. Довести, що $p \mid C_p^k$.
13. Довести, що для цілих a, b і простого p $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$.
14. Довести, що число $\sqrt{10}((1+\sqrt{10})^{10} - (1-\sqrt{10})^{10})$ — ціле.