Многочлени та твірні функції в комбінаториці

1) Вивести тотожність $(1+x)^{1/2}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 2^3}C_2^1x^2+....+\frac{(-1)^{k-1}}{k\cdot 2^{2k-1}}C_{2k-2}^{k-1}x^k+...$
2) Послідовність T_n задана співвідношенням $T_n=T_0T_{n-1}+T_1T_{n-2}+...+T_{n-1}T_0$ та $T_0=1$. Використовуючи пр. функції довести, що $T_n=\frac{1}{n+1}C_{2n}^n$.
3) Знайти коефіцієнт при x^k в виразі $(1+x+x^2+...+x^{n-1})^2$.
4) Довести, що $C_n^0+C_n^3+C_n^6+....=\frac{1}{3}(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3})$
5) Знайти кількість p-елементних підмножин множини $\{1,2,...,2p\}$ сума елементів яких ділиться на p. p - просте число.
6) Порахувати суми:
    - $C_n^1+2C_n^2+...+nC_n^n$
    - $C_n^2+2C_n^3+...+(n-1)C_n^n$
    - $3C_n^1+7C_n^2+...+(4n-1)C_n^n$
    - $\frac{C_n^0}{1}+\frac{C_n^1}{2}+...+\frac{C_n^n}{n+1}$
    - $(C_n^0)^2-(C_n^1)^2+...+(-1)^n(C_n^n)^2$
7) З тотожності $(1+x)^n=(1-x^2)^n(1-x)^{-n}$ вивести, що $\sum_{s=0}(-1)^sC_{n+k-2s}^nC_{n+1}^s=C_{n+1}^k$
8) Доведіть (використовуючи якусь тотожність), що $\sum_{s=0}(-1)^sC_{n+2k-s}^nC_{n+s}^n=C_{n+k}^k$
9) Довести $\sum_{t=0}^n\frac{C_n^tC_n^r}{C_{2n}^{t+r}}=\frac{2n+1}{n+1}$
10) Знайти кількість коефіцієнтів $P(x)=(1+x)^n$ які не діляться на 3.
11) Знайти кількість непарних коефіцієнтів $P(x)=(1+x+x^2)^n$.
12) $m\ge 2n$. Знайти кількість многочленів степені $2n-1$ з попарно різними коефіцієнтами з $\{1,2,....,m\}$ які діляться на $x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1$.
13) Скінченну послідовність $a_1,a_2,....,a_n$ назвемо p-збалансованою, якщо числа $a_k+a_{k+p}+a_{k+2p}+...$ рівні для $k=1,2,...p$. Знайдіть всі послідовності з 50 чисел, які p-збалансованою для $p=2,3,5,7,11,13,17$ (одночасно).
14) В одній з вершин правильного n-кутника стоїть число 1, в інших 0. Пан Іван одночасно додає до кожної вершини її сусіда по годинниковій стрілці, після цього він одночасно додає до кожної вершини число що стоїть через один по годинниковій стрілці, потім – через 2 і т.д. Нарешті він додав до кожної вершини її сусіда проти годинникової стрілки. Після цих $n-1$ операцій $n-1$ число виявилися рівними між собою. Чому може бути рівне n?

15) Нехай $p \ge 5$. Для непустого $T \subset \{0,1,2,\dots p-1\}$ визначимо $E(T)$ як кількість послідовностей $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$, для яких $\sum_{i=1}^{p-1} i x_i$ ділиться на p і всі $x_i \in T$. Довести $\left|E(0,1,3)\right| \ge \left|E(0,1,2)\right|$.

16) Нехай $m, n \ge 2$ - натуральні, $a_1, a_2, \dots a_n$ - цілі, жодне з яких не ділиться на m^{n-1}. Довести, що знайдуться $e_1, \dots, e_n$ - цілі не всі рівні 0, та $\left|e_i\right| < m$, та такі, що сума $e_1 a_1 + e_2 a_2 + \dots + e_n a_n$ ділиться на m^n.

17) Нехай є 10^6 квитків $\overline{abcdef}$, де a, b, c, d, e, f - пробігають $0,1,2,3,\dots,9$. Квиток назвемо фартовим, якщо $a+b+c=d+e+f$. Знайти кількість фартових квитків.

18) В лівому нижньому кутку дошки $n \times n$ стоїть король, що може ходити вправо, вверх або по діагоналі вправо-вверх. Позначимо A_n - кількість способів дійти в протилежний кут дошки, а A_n^* - кількість способів дійти в протилежний кут не заходячи в лівий стовпчик та верхній рядок (за виключенням кутових клітин). Довести $2A_{n-1} = A_n^*$.

19) Жаба стрибає по вершинам правильного трикутника ABC, кожен раз стрибаючи в одну з сусідніх вершин. Знайти кількість способів потрапити з A в A за n-стрибків.