# Комбинаторика!

Хилько Данил dkhilko@ukr.net

**Задача 1.** *В некоторых клетках доски $100 \times 100$ стоит по фишке. Назовём клетку красивой, если в соседних с ней по стороне клетках стоит чётное число фишек. Может ли ровно одна клетка доски быть красивой?*

**Задача 2.** *На бесконечной во все стороны шахматной доске выделено некоторое множество клеток А. На всех клетках доски, кроме множества А, стоят короли. Все короли могут по команде одновременно сделать ход, заключающийся в том, что король либо остается на месте, либо занимает соседнее поле, то есть делает "ход короля". При этом он может занять и то поле, с которого сходит другой король, но в результате хода двум королям оказаться в одной клетке запрещается. Существует ли такое $k$ и такой способ движения королей, что после $k$ ходов вся доска будет заполнена королями? Рассмотрите варианты:*

1. *А есть множество всех клеток, у которых обе координаты кратны 100 (предполагается, что одна горизонтальная и одна вертикальная линии занумерованы всеми целыми числами от минус бесконечности до бесконечности и каждая клетка доски обозначается двумя числами - координатами по этим двум осям).*

2. *А есть множество всех клеток, каждая из которых бьется хотя бы одним из 100 ферзей, расположенных каким-то фиксированным образом.*

**Задача 3.** *Дана бесконечная клетчатая бумага со стороной клетки, равной единице. Расстоянием между двумя клетками называется длина кратчайшего пути ладьи от одной клетки до другой (считается путь центра ладьи). В какое наименьшее число красок нужно раскрасить доску (каждая клетка закрашивается одной краской), чтобы две клетки, находящиеся на расстоянии 6, были всегда окрашены разными красками?*

**Задача 4.** *По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное количество комнат, занумерованных числами от минус бесконечности до плюс бесконечности. В комнатах живут 9 пианистов (в одной комнате могут жить несколько пианистов), кроме того, в каждой комнате находится по роялю. Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах ($k$-й и $(k+1)$-й), приходят к выводу, что они мешают друг другу, и переселяются соответственно в $(k-1)$-ю и $(k+2)$-ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся. (Пианисты, живущие в одной комнате, друг другу не мешают.)*

**Задача 5.** *На бесконечной клетчатой бумаге отмечено шесть клеток (см. рисунок).*

*На некоторых клетках стоят фишки. Положение фишек разрешается преобразовывать по следующему правилу: если клетки соседняя сверху и соседняя справа от данной фишки обе свободны, то можно поставить в эти клетки по фишке, убрав при этом старую. Ставится цель за некоторое количество таких операций освободить все шесть отмеченных клеток. Можно ли достигнуть этой цели, если*

1. *в исходной позиции имеются всего 6 фишек, и они стоят на отмеченных клетках;*

2. *в исходной позиции имеется всего одна фишка, и она стоит в левой нижней отмеченной клетке.*