# Як рахувати геометрію без комплексних чисел?

Літній математичний табір "Контора $\pi$"
Середня група

Олімпіадні задачі з геометрії часто розв'язуються за допомогою доведення тих чи інших алгебраїчних тотожностей. Основними засобами у цьому можуть слугувати:

- теорема Фалеса;
- теорема Менелая, Чеви, кутова форма теореми Чеви;
- теорема синусів;
- теорема косинусів;
- тригонометричні тотожності;
- степінь точки та теорема про квадрат дотичної.

**Теорема 1.** *Нехай $A$, $B$, $C$, $D$ — довільні точки площини. Доведіть, що $AC \perp BD$ тоді і тільки тоді, коли $AB^2 - BC^2 = AD^2 - DC^2$.*

**Наслідок 1.** *Нехай $\omega_1$ і $\omega_2$ — кола з центрами $O_1$ та $O_2$ відповідно ($O_1 \neq O_2$). Доведіть, що $AB \perp O_1O_2$ тоді тоді і тільки тоді, коли $p(A, \omega_1) - p(A, \omega_2) = p(B, \omega_1) - p(B, \omega_2)$. ($p(X, \omega)$ — степінь точки $X$ відносно кола $\omega$).*

**Задача 1.** *Чотирикутник $ABCD$ такий, що $AB = AC = BD$. Точка $P$ — перетин його діагоналей, $I$ та $O$ — центри описаного та вписаного кіл трикутника $ABP$ відповідно, причому $I$ та $O$ не співпадають. Доведіть, що $OI \perp CD$.*

**Теорема 2.** *Якщо $\alpha + \beta = \gamma + \delta < \pi$ та*

$$\frac{sin\alpha}{sin\beta} = \frac{sin\gamma}{sin\delta}$$

*то $\alpha = \gamma$ та $\beta = \delta$.*

**Вправа 1.** *Нехай $AK$ — чевіана трикутника $ABC$. Доведіть, що*

$$\frac{sin\angle BAK}{sin\angle KAC} = \frac{KB \cdot AC}{KC \cdot AB}$$

**Задача 2.** *(Симедіана) Дотичні до описаного кола трикутника $ABC$ в точках $B$ та $C$ перетинаються в точці $S$. Доведіть, що $\angle BAM = \angle CAS$, де $M$ — середина сторони $BC$.*

**Задача 3.** *На бісектрисі $AL$ трикутника $ABC$ вибрані точки $K$ та $M$. Прямі $BK$ та $CM$ перетинаються в точці $P$, а прямі $CK$ та $BM$ — в точці $Q$. Доведіть, що $\angle PAB = \angle QAC$.*

**Задача 4.** *В гострокутому трикутнику $ABC$ висоти $AH_1$, $BH_2$, $CH_3$ перетинаються в ортоцентрі $H$. Перпендикуляр з $H$ на $H_1H_3$ перетинає пряму $AB$ в $P$, а перпендикуляр з $H$ на $H_1H_2$ перетинає пряму $AC$ в $Q$. Доведіть, що перпендикуляр з $A$ на $H_2H_3$ ділить відрізок $PQ$ навпіл.*

**Задача 5.** *(IMO SL 2016 G2) Дано трикутник $ABC$ з описаним колом $\Gamma$ і інцентром $I$. Нехай $M$ — середина $BC$. Позначимо через $D$ перпендикуляр з $I$ на $BC$. Пряма, що проходить через $I$ перпендикулярно $AI$ перетинає сторони $AB$ і $AC$ в точках $F$ і $E$ відповідно. Нехай описане коло трикутника $AEF$ перетинає $\Gamma$ вдруге в $X$. Доведіть, що прямі $XD$ та $AM$ перетинаються на $\Gamma$.*

**Задача 6.** *Нехай* $H$ *— ортоцентр трикутника* $ABC$*. Пряма, що проходить через* $H$*, перетинає сторони* $AC$ *та* $AB$ *в точках* $M$ *та* $N$ *відповідно. Описане коло* $\omega$ *трикутника* $MNA$ *вдруге перетинає описане коло трикутника* $ABC$ *в точці* $P$*. Пряма* $PH$ *вдруге перетинає* $\omega$ *в точці* $Q$*. Доведіть, що* $MN \perp CQ$*.*

**Задача 7.** *Бісектриси* $AD$ *і* $BE$ *трикутника* $ABC$ *перетинають його описане коло в точках* $X$ *та* $Y$*. Доведіть, що прямі* $EF$*,* $XY$ *та дотична до описаного кола* $ABC$ *в точці* $C$ *перетинаються в одній точці.*

**Задача 8.** *Нехай* $\omega$ *— описане коло трикутника* $ABC$*. Бісектриса кута* $BAC$ *вдруге перетинає коло* $\omega$ *в точці* $W$*. На колі* $\omega$ *відмітили точки* $M$ *та* $N$ *так, що* $BM \parallel AW \parallel CN$*, промені* $BM$ *та* $CN$ *напрямлені протилежно до променя* $AW$*. Нехай* $O_1$*,* $O_2$*,* $O_3$*,* $O_4$ *— центри кіл, вписаних в трикутники* $AMB$*,* $ABW$*,* $ACW$*,* $ACN$ *відповідно. Доведіть, що* $O_1O_3 = O_2O_4$*.*

Хілько Данило
dkhilko@ukr.net