Теория чисел. Комбинаторика и конструктивы

Хилько Данил dkhilko@ukr.net

Задача 1. *Существует ли число, которое делится на* 2016 *и в котором каждая из цифр* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0$ *встречается хотя бы по* 100 *раз.*

Задача 2. *Доказать, что в арифметической прогрессии с первым членом равным* 1 *и разностью* 729 *найдётся бесконечно много степеней* 10.

Задача 3. *Дано натуральное число* n. *Докажите, что найдутся такие числа* a, b, c, *что* $n^2 < a, b, c < (n+1)^2$ *и* $a^2 + b^2$ *делится на* c.

Задача 4. *Существуют ли такие натуральные числа* $a_1 < a_2 < \cdots < a_{100}$, *что*

$$(a_1, a_2) > (a_2, a_3) > \cdots > (a_{99}, a_{100}).$$

((a, b) *обозначает наибольший общий делитель натуральных чисел* a *и* b*.)*

Задача 5. *Докажите, что каждое число можно представить как разность двух натуральных чисел, имеющих одинаковое количество простых делителей. (Простые делители учитываются по одному разу.)*

Задача 6. *Существует ли такое натуральное* n, *что десятичная запись числа* 2^n *начинается на* 5, *а* 5^n *— на* 2*?*

Задача 7. *Бесконечная арифметическая прогрессия* $a_1, a_2, \ldots$, *состоящая из натуральных чисел, такова, что при любом* n *произведение* $a_n \cdot a_{n+31}$ *делится на* 2005. *Правда ли, что все члены прогрессии делятся на* 2005*?*

Задача 8. *Найти все натуральные* n, *у которых есть ровно* 16 *делителей* $d_1, d_2 \cdots, d_{16}$ *таких, что* $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{16} = n$, $d_6 = 18$ *и* $d_9 - d_8 = 17$.

Задача 9. *Докажите, что з любых шести четырёхзначных чисел, взаимно простых в совокупности, можно выбрать пять, также взаимно простых в совокупности.*

Задача 10. *Пусть*

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{a_n}{b_n},$$

где $\frac{a_n}{b_n}$ *— несократимая дробь. Докажите, что найдется бесконечно много натуральных* n, *при которых выполняется* $b_{n+1} < b_n$.

Задача 11. *На отрезке* $[0; 2002]$ *отмечены его концы и точка с координатой* d, *где* d *— взаимно простое с* 1001 *число. Разрешается отметить любю середину отрезка с концами в отмеченных точках, если её координата целая. Можно ли, повторив эту операцию несколько раз, отметить все целые точки на отрезке?*

Задача 12. *На правой чаше весов лежит груз массой* 11111 *г. Весовщик последовательно раскладывает по чашам гири, первая из которых имеет массу* 1 *г, а каждая следующая вдвое тяжелее предыдущей. В какой-то момент весы оказались в равновесии. На какой чаше лежит* 16*-граммовая гиря.*

Задача 13. *Шайка разбойников отобрала у купца мешок с монетами. Каждая монета стоит целое число грошей. Оказалось, что какую бы монету не отложить, оставшиеся монеты можно разделить между разбойниками так, чтобы каждый получил одинаковую сумму в грошах. Докажите, что если отложить одну монету, то число монет разделится на число разбойников.*