III етап Всеукраїнської олімпіади юних математиків

Умови та розв'язки по усіх класах

2 тур

7 клас

1. **(Фольклор)** Знайдіть найбільше натуральне число, у якого усі цифри різні та кожні дві сусідні цифри відрізняються щонайменше на 2.

Відповідь: 9758642031.

Розв'язання. Зрозуміло, що число не може мати більше ніж 10 цифр, крім того воно повинно бути десятицифровим, бо таке число завжди більше від числа, що має меншу кількість цифр.

Тепер просто будемо записувати цифри шуканого числа, беручи до уваги, що у двох чисел з однаковою кількістю цифр більшим є те, у якого більшою є цифра у більшому розряді. Таким чином будемо ставити відповідні цифри по місцях.

975 – перші три цифри, зрозуміло, що другою цифрою не може бути 8, так само й третьою.

975864 – перші шість цифр. Далі не може стояти 3, тому повинно стояти 2, а тому останні цифри ставляться таким чином: 9758642031.

2. **(Рубльов Богдан)** Використовуючи числа $1, 2, \ldots, 20$ рівно по одному разу в якості чисельників або знаменників, утворіть 10 таких звичайних дробів, щоб їх сума була цілим числом. Достатньо навести принаймні один такий приклад.

Відповідь:

$$\frac{17}{3}+\frac{13}{2}+\frac{11}{6}+\frac{19}{1}+\frac{14}{7}+\frac{18}{9}+\frac{20}{10}+\frac{16}{8}+\frac{15}{5}+\frac{12}{4}=$$

$$=14+19+2+2+2+2+3+3=47.$$

3. **(Рожкова Марія)** Чи існує опуклий чотирикутник, у якого протилежні сторони не паралельні, та який можна розрізати на 2011 рівнобедрених трикутників?

Розв'язання. Одни з прикладів чотирикутника та його розбиття показаний на рис.1. Тут неважко показати, що відповідні сторони непаралельні. Спочатку розглядаємо рівнобедрений трикутник $A_1B_1B_2$, який має досить малий кут при вершині. Використаємо 2009 таких трикутників, а далі добудуємо ще два рівнобедрених трикутники $A_1A_{1005}C$ та $B_1B_{1006}D$, у яких – $A_1A_{1005} = A_1C$, та $B_1B_{1006} = B_1D$.

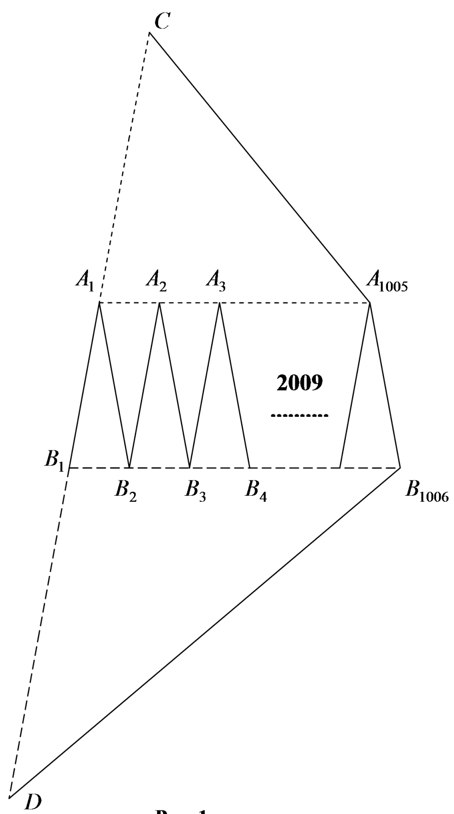

Рис. 1

4. **(Рубльов Богдан)** На дошці розміром 9×9 клітинок на центральному полі стоїть чорна фішка, а на серединах сторін зовнішнього квадрату стоять 4 білі фішки. Перший гравець грає чорною фішкою, він може за один хід пересунути її на будь-яку сусідню по стороні клітину, якщо на ній не стоїть біла фішка. Другий гравець своїм ходом виставляє додатково 1 білу фішку на зовнішньому периметрі квадрату, але обов'язково в таке поле, що межує по стороні з будь-яким іншим полем, в якому вже стоїть біла фішка.

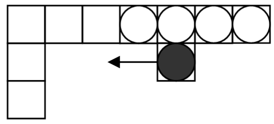

Рис. 2

Виграє перший гравець, якщо йому вдалося досягти зовнішньої межі квадрату. Якщо другий зміг цьому завадити, то перемагає він. Хто переможе у такій грі, перший чи другий гравець?

Відповідь: виграє перший гравець.

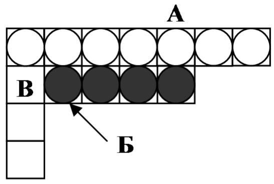

Рис. 3

Розв'язання. Перший гравець ходить у напрямі будь-якої середньої на стороні клітини, наприклад, клітини А, що є середньою на верхній стороні квадрату. Він досягає сусідньої клітини за 3 ходи. Тоді принаймні з одного боку від цієї клітини другий поставив максимум 1 фішку. Наприклад зліва. рис.2. Тоді перший гравець рухає свою чорну фішку у напрямі стрілки і досягає клітини Б.

Навіть, якщо другий гравець ходить у тому ж самому напрямі, то при цій ситуації у клітині Б рис.3, він не може завадити попасти першому у клітину В, оскільки повинен зробити хід у кутову клітину. Якщо другий змінить стратегію ходів, то він може програти лише раніше.

5. **(Данилова Алла)** Знайти всі такі пари простих чисел (a, b), для яких число $a^b b^a + 1$ також просте.

Відповідь: $(2, 3), (3, 2), (2, 2)$.

Розв'язання. Очевидно, що для того, щоб число $a^b b^a + 1$ було простим, необхідно, щоб хоча б одне з чисел a, чи b було парним. Без обмеження загальності припустимо, що $a = 2$. Легко помітити, що значення $b = 2$ та $b = 3$ задовольняють умову. Покажемо, що для всіх $b > 3$ число $a^b b^a + 1$ не буде простим (а саме – воно ділиться на 3)

Перепишемо наш вираз з урахуванням викладеного вище: $2^b b^2 + 1, b > 3$. Отже, можемо стверджувати, що для простих b остача при діленні на 3 буде дорівнювати 1 чи 2. Відповідно, квадрат цього числа даватиме в остачі при діленні на 3 значення 1. Аналогічно, будь-який непарний степінь двійки при діленні на 3 дає остачу 2. Таким чином отримуємо, що число $2^b b^2 + 1$,при $b > 3$, є кратним 3, а тому простим бути не може.

5.1. **(Фольклор)** Знайдіть усі такі двоцифрові натуральні числа N, які дорівнюють сумі цифр числа N до якої додається куб суми цифр числа N.

Відповідь: 30.

Розв'язання. Позначимо суму цифр числа N через n, тоді маємо таку рівність: $N = n + n^3$. Зрозуміло, що куб суми цифр не перевищує 99, а таких кубів натуральних чисел усього чотири – $1, 2, 3, 4$. Достатньо їх перебрати. Тоді з рівності $N = n + n^3$ знайдемо можливі значення N:

$N = 1 + 1 = 2$ – має суму цифр 2, умову не задовольняє;
$N = 8 + 2 = 10$ – має суму цифр 1, умову не задовольняє;
$N = 27 + 3 = 30$ – має суму цифр 3, є розв'язком задачі;
$N = 64 + 4 = 68$ – має суму цифр 14, умову не задовольняє.

8 клас

1. **(Фольклор)** Знайдіть найбільше парне натуральне число, у якого усі цифри різні та кожні дві сусідні цифри відрізняються щонайменше на 2.

Відповідь: 9758641302.

Розв'язання. Початок розв'язання співпадає з початком розв'язання задачі 7–1. Таким чином знаходимо число початок шуканого числа 975864.

Якщо тепер поставити цифру 2, то наступною може йти лише цифра 0 і усі парні числа використані, тобто остаточне число не може бути парним. Таким чином наступною цифрою може у максимального числа йти 1. Далі решта цифр ставляться однозначно: 9758641302.

2. **(Фольклор)** Знайдіть попарно різні натуральні числа a, b, c, d такі, що:

$$\frac{1}{2011} = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} - \frac{c}{c+1} - \frac{d}{d+1}.$$

Відповідь: відповідей може бути багато, ось приклад однієї з можливих:

$$\frac{1}{2011} = \frac{2010 \cdot 2011}{2010 \cdot 2011 + 1} + \frac{2010 \cdot 2011(2010 \cdot 2011 + 1) - 1}{2010 \cdot 2011(2010 \cdot 2011 + 1)} - \frac{2010}{2011} - \frac{2011 \cdot 2012 - 1}{2011 \cdot 2012}.$$

Розв'язання. Скористаємось такими формулами:

$$\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n(n-1)}, \qquad \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)},$$

тоді маємо, що $\frac{1}{2011} = \frac{1}{2010} - \frac{1}{2010 \cdot 2011} = \frac{1}{2011} + \frac{1}{2011 \cdot 2012} - \frac{1}{2010 \cdot 2011 + 1} - \frac{1}{2010 \cdot 2011(2010 \cdot 2011 + 1)} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} - \frac{1}{c+1} - \frac{1}{d+1}$. Тепер до відємних дробів додамо по 1, а від додатних – віднімемо по 1, звідки й будемо мати шукане представлення:

$$\frac{1}{2011} = -\frac{2010}{2011} - \frac{2011 \cdot 2012 - 1}{2011 \cdot 2012} + \frac{2010 \cdot 2011}{2010 \cdot 2011 + 1} +$$
$$+ \frac{2010 \cdot 2011(2010 \cdot 2011 + 1) - 1}{2010 \cdot 2011(2010 \cdot 2011 + 1)} = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} - \frac{c}{c+1} - \frac{d}{d+1}.$$

3. **(Мірчев Борислав)** На сторонах AD та BC квадрата $ABCD$ вибрані точки M та N відповідно таким чином, що $AM = BN$. Точка X – основа перпендикуляра, опущеного з точки D на пряму AN. Доведіть, що кут MXC – прямий.

Розв'язання. Проведемо діагоналі прямокутника $MNCD$, які перетинаються в центрі O описаного навколо нього кола, тоді за побудовою точка X лежить на цьому колі з діаметром DN (рис.4). Тоді з властивостей вписаних у коло кутів маємо такі рівності: $\angle NXC = \angle NDC = \angle MCD = \angle MXD$. Звідси випливає, що

$$\angle MXC = \angle MXD + \angle DXC =$$
$$= \angle CXN + \angle DXC = \angle DXN = 90^\circ,$$

що й треба було довести.

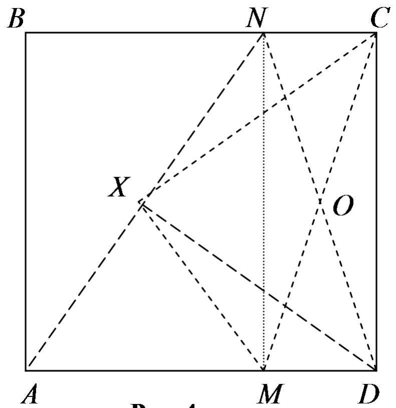

Рис. 4

4. **(Рубльов Богдан)** На дошці розміром 11×11 на центральному полі стоїть чорна фішка, а на серединах сторін зовнішнього квадрату стоять 4 білі фішки. Перший гравець грає чорною фішкою, він може за один хід пересунути її на будь-яку сусідню по стороні клітину, якщо на ній не стоїть біла фішка.

Другий гравець своїм ходом виставляє додатково 1 білу фішку на зовнішньому периметрі квадрату, але обов'язково в таке поле, що межує по стороні з будь-яким іншим полем, в якому вже стоїть біла фішка. Виграє перший гравець, якщо йому вдалося досягти зовнішньої межі квадрату. Якщо другий зміг цьому завадити, то перемагає він. Хто переможе у такій грі, перший чи другий гравець?

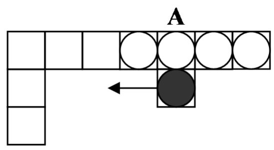

Рис. 2

Відповідь: виграє перший гравець.

Розв'язання. Перший гравець ходить у напрямі будь-якої середньої на стороні клітини, наприклад, клітини А, що є середньою на верхній стороні квадрату. Він досягає сусідньої клітини за 4 ходи. Якщо принаймні з одного боку від цієї клітини другий поставив максимум 1 фішку, наприклад зліва, (рис.2), тоді перший гравець рухає свою чорну фішку у напрямі стрілки і досягає клітини Б.

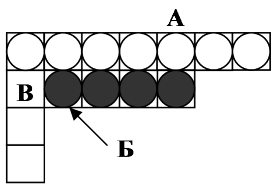

Рис. 3

Навіть, якщо другий гравець ходить у тому ж самому напрямі, то при цій ситуації у клітині Б рис.3. Він не може завадити попасти першому у клітину В, оскільки повинен зробити хід у кутову клітину.

Якщо у нього стоїть по дві фішки по обидва боки, то він починає рухатись у будь-якому напрямі, наприклад, як і раніше у лівий бік. Тоді другий може йому завадити виграти до досягнення найближчої кутової клітини. Але відповідь другого гравця є єдиною можливою, щоб не програти. І ми одержимо ситуацію, що зображена на рис.5. У цій ситуації хід першого, і вн перемагає, оскільки ця ситуація аналогічна до розглянутих вище.

5. **(Веклич Богдан)** Скільки розв'язків у цілих числах має рівняння

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = x^3 + y^3 + z^3 + s,$$

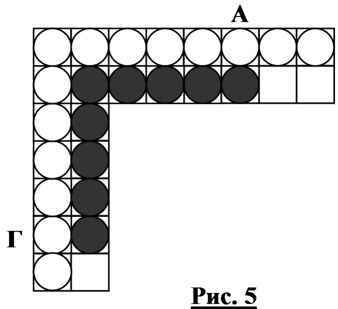

Рис. 5

якщо а) $s = 0$; б) $s = 1$?

Відповідь: а) нескінченно багато розв'язків, б) розв'язків немає.

Розв'язання. а) Покладемо спочатку $x = -y$, тоді наше рівняння набуває вигляду

$$3x^2 + z^2 = z^3.$$

Тепер нехай $x = tz$, тоді рівняння стає таким:

$3z^2t^2 + z^2 = z^3$, або $3t^2 + 1 = z$, таким чином кожна трійка

$$z = 3t^2 + 1, x = t(3t^2 + 1), y = -t(3t^2 + 1)$$

задовольняє рівняння при довільному цілому t.

б) Неважко побачити, що для усіх цілих t має місце конгруенція $t^3 \equiv t \pmod 3$. Припустимо, що рівняння має розв'язок у цілих числах, тоді позначимо $x + y + z = a$ і будемо мати за модулем 3, що

$$a + 1 \equiv x + y + z + 1 \equiv x^3 + y^3 + z^3 + 1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \equiv$$

$$\equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \equiv (x + y + z)^2 \equiv a^2,$$

тобто $a^2 - a - 1 \vdots 3$, але останнє неможливе, оскільки, якщо a кратне 3, то це очевидно не вірне, а якщо a не кратне 3, то $a^2 - a - 1 \equiv -a$ – не може ділитись на 3. Одержана суперечність показує, що це рівняння не має розв'язків у цілих числах.

5.1. **(Фольклор)** Натуральне число $k > 1$. Знайдіть усі цілі числа (x, y), які задовольняють рівність:

$$y^k = x^2 + x.$$

Відповідь: $(0, 0), (-1, 0)$.

Розв'язання. Запишемо задані рівність у вигляді $y^k = x(x + 1)$. Це можливо при $x = 0$ та $x = -1$, тоді $y = 0$. Припустимо тепер, що $x \neq 0, -1$.

Числа x та $x + 1$ взаємно прості, тому остання рівність можлива лише за умови, що $x = a^k$ та $x + 1 = b^k$ для деяких цілих $a, b \neq 0$, при цьому числа a, b можна вибрати одного знаку. Тоді з рівності

$$(x + 1) - x = 1 = b^k - a^k = (b - a)(b^{k-1} + b^{k-2}a + \ldots + a^{k-1})$$

маємо, що добуток двох цілих чисел дорівнює 1, але другий множник у правій частині за модулем більший від 1, оскільки там усі доданки одного знаку та їх кількість не менше двох. Одержана суперечність показує, що рівність неможлива.

<u>9 клас</u>

1. **(Фольклор)** Знайдіть усі такі трицифрові натуральні числа N, які дорівнюють сумі цифр числа N до якої додається куб суми цифр числа N.

<u>Відповідь:</u> 222.

<u>Розв'язання.</u> Позначимо суму цифр числа N через n, тоді маємо таку рівність: $N = n + n^3$. Оскільки $1 \leq n \leq 27$, то n^3 лежить в межах від 73 до 998, оскільки

$$73 = 100 - 27 \leq N - 27 \leq n^3 \leq N - 1 \leq 999 - 1 = 998.$$

Простим підбором знаходимо, що у цих межах лежать такі куби натуральних чисел:

$$5^3 = 125, 6^3 = 216, 7^3 = 343, 8^3 = 512, 9^3 = 729.$$

Тоді з рівності $N = n + n^3$ знаходимо можливі значення N:
$N = 125 + 5 = 130$ – має суму цифр 4, умову не задовольняє;
$N = 216 + 6 = 222$ – має суму цифр 6, є розв'язком задачі;
$N = 343 + 7 = 350$ – має суму цифр 8, умову не задовольняє;
$N = 512 + 8 = 520$ – має суму цифр 7, умову не задовольняє;
$N = 729 + 9 = 738$ – має суму цифр 18, умову не задовольняє.

2. **(Мисак Данило)** П'ять років тому сумарний вік усіх синів у родині перевищував сумарний вік усіх доньок на 2 роки. З того часу в сім'ї народилася ще одна дитина, і тепер сумарний вік усіх доньок перевищує сумарний вік усіх синів на 2 роки. Наскільки відрізнялися сумарний вік синів і сумарний вік доньок у родині два роки тому?

<u>Відповідь:</u> Вони були рівними або сумарний вік доньок перевищував сумарний вік синів на рік.

<u>Розв'язання.</u> Нехай п'ять років тому в сім'ї було n синів та m доньок, сумарний вік синів дорівнював N, а сумарний вік доньок — M.

Якщо k років тому у родині народилася ще одна донька, то сумарний вік синів тепер складає $N + 5n$, а сумарний вік доньок — $M + 5m + k$. Оскільки $N = M + 2$, звідси маємо, що $(N + 5n) + 2 = M + 5m + k \Rightarrow M + 5n + 4 = M + 5m + k \Rightarrow k = 5(n - m) + 4$, а оскільки $0 \leq k \leq 5$, то $k = 4$ і $n - m = 0$. Тож два роки тому сумарний вік синів $N + 3n$ і доньок $M + 3m + 2$ були рівними: $N + 3n - (M + 3m + 2) = (N - M) + 3(n - m) - 2 = 2 - 2 = 0$.

Але в родині міг народитися й син. Нехай нині йому k років. Тоді сумарний вік синів на даний момент складає $N + 5n + k$, а доньок — $M + 5m$. Маємо, що $(N + 5n + k) + 2 = M + 5m \Rightarrow M + 5n + k + 4 = M + 5m \Rightarrow k = 5(m - n) - 4$. І знову, оскільки $0 \leq k \leq 5$, то $k = 1$ і $m - n = 1$. Тож два роки тому сумарний вік доньок $M + 3m$ переважав вік синів $N + 3n$ на рік: $M + 3m - (N + 3n) = (M - N) + 3(m - n) = -2 + 3 = 1$.

3. **(Чорний Максим)** На папері в клітинку зі стороною 1 задано замкнену ламану без самоперетинів. Усі вершини ламаної лежать у вузлах сітки, а всі її ланки утворюють кут $45°$ з лініями сітки, а площа, яку вона обмежує, дорівнює 8. Скільки вузлів сітки може лежати всередині (не на межі) ламаної?

<u>Відповідь:</u> 4 або 5.

<u>Розв'язання.</u> Пофарбуємо вузли сітки чорним і білим кольором в "шаховому"порядку (тобто ніякі два сусідні вузли не є однокольоровими). Оскільки всі відрізки ламаної утворюють кут $45°$ з лініями сітки, то всі її вершини, як нескладно помітити, є одного кольору. Без обмеження загальності будемо вважати, що чорного.

Тоді з'єднаємо всі пари чорних точок, відстань між якими дорівнює $\sqrt{2}$, зеленими відрізками. Бачимо, що чорні вузли разом з зеленими відрізками утворюють нову клітчату сітку з площею квадратика, рівною 2 (рис.6).

Тоді всі відрізки нашої ламаної, як неважко переконатися, йдуть по лініям нової сітки, причому обмежують $\frac{8}{2} = 4$ її квадратики. Що ж відбувається з вузлами початкової сітки? Ті, які ми позначили чорним кольором, переходять у вершини нової, а ті, які білим - в центри нових квадратиків. Останніх у нас, очевидно, 4, а вершин нової сітки – стільки ж, скільки різних квадратиків 2×2 містить ламана на новій сітці (взаємно однозначна відповідність між квадратиками 2×2 і їх центрами, які лежать всередині ламаної) . Таких квадратиків, очевидно, не може бути більше одного, адже площа одного вже дорівнює площі всередині ламаної. Звідси маємо і відповідь – 4 або 5. Приклади для обох варіантів наведені нижче.

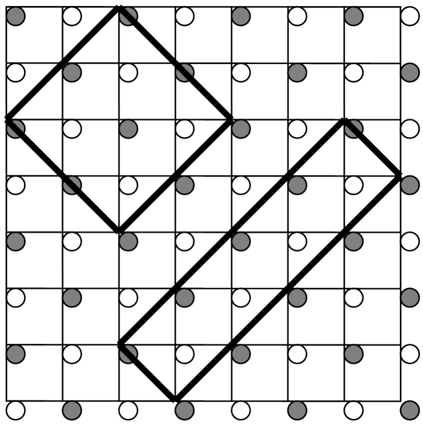

Рис. 6

4. **(Білецький Юрій)** У двох колах, що дотикаються зовнішнім чином в точці C, провели співнапрямлені діаметри A_1A_2, B_1B_2 (тобто чотирикутник $A_1B_1B_2A_2$ є трапецією з основами A_1A_2 та B_1B_2 або паралелограмом). Коло з центром на спільній внутрішній дотичній до данних двох проходить через точку перетину прямих A_1B_2, A_2B_1, а також перетинає їх у точках M, N. Доведіть, що пряма MN перпендикулярна паралельним діаметрам A_1A_2, B_1B_2.

Розв'язання. Оскільки точка дотику двох кіл – центр гомотетії, що переводить одне коло в інше, то $C = A_1B_2 \cap A_2B_1$, та $A_1B_2 \perp A_2B_1$, бо кут $\angle A_1CA_2$ є вписаним що опирається на діаметр (рис.7). Нехай точка $D = MN \cap B_1B_2$. Тоді $\angle DB_2C = \angle B_2A_1A_2 = \angle A_2CO = \angle CND$ (перша рівність є наслідком паралельності $A_1A_2 \parallel B_1B_2$, друга – теореми про кут між дотичною і хордою, третя – рівнобедреності утвореного двома радіусами кола $\triangle CON$). Отже чотирикутник DB_2NC – вписаний і тому $\angle B_2DN = \angle B_2CA_2 = \frac{\pi}{2}$, звідки $MN \perp B_1B_2$.

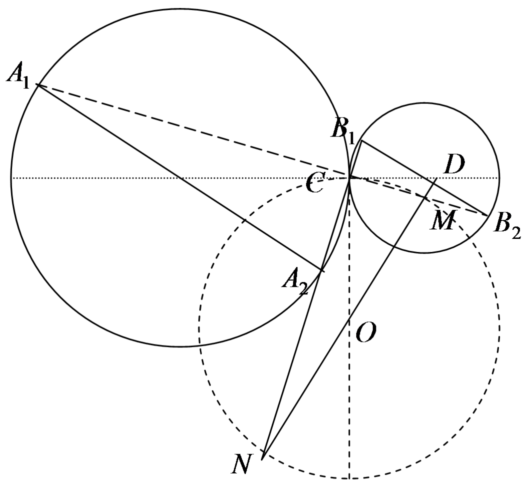

Рис. 7

5. **(Веклич Богдан)** Скільки розв'язків у цілих числах має рівняння

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = x^3 + y^3 + z^3 + s,$$

якщо а) $s = -1$; б) $s = 1$?

Відповідь: а) нескінченно багато розв'язків, б) розв'язків немає.

Розв'язання. а) Покладемо $x + y = 1, z = 1$, тоді наше рівняння набуває вигляду

$$(x^2 + y^2 - xy) + 1 - (y + x) = x^3 + y^3,$$

$$(x + y)(x^2 + y^2 - xy) = x^3 + y^3,$$

тобто кожна така трійка чисел задовольняє умову задачі, а таких трійок очевидно нескінченна кількість.

б) Дивись розв'язання задачі 8–4 пункт б)

5.1. **(Задача 8–5.1)**

10 клас

1. **(Фольклор)** Сума декількох послідовних натуральних чисел (більше одного) дорівнює 2011. Знайдіть усі такі набори послідовних натуральних чисел.

Відповідь: $1005+1006$.

Розв'язання. Позначимо перше з цих чисел через a_1, а останнє – a_n, вони утворюють арифметичну прогресію, тому з формули суми арифметичної прогресії маємо таку рівність:

$$\frac{a_1+a_n}{2}n=2011 \qquad \Leftrightarrow \qquad (a_1+a_n)n=2\cdot 2011.$$

У лівій частині добуток двох натуральних чисел, кожне з яких не менше 2, а у правій частині добуток двох простих чисел. Звідси зрозуміло, що можливі лише такі варіанти: $a_1+a_n=2$ та $n=2011$ або $a_1+a_n=2011$ та $n=2$. Перший варіант очевидно умови не задовольняє, а з другого знаходимо єдину можливу відповідь: $1005+1006$.

2. **(Гоголєв Андрій)** Послідовність (a_n) визначається такими умовами:

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=(n+1)(a_n+a_{n+1})$$

для кожного натурального n. На скільки нулів закінчується число a_{2011}?

Відповідь: 501.

Розв'язання. Якщо обчислити $a_3=6$, $a_4=24$, то можна припустити, що $a_n=n!$, що легко доводиться ММІ: $a_{n+2}=(n+1)(n!+(n+1)!)=n!(n+1)(n+2)=(n+2)!$. Кількість нулів визначається тим, на яку степінь 5 ділиться число 2008. Вона визначається за добре відомою формулою: $\left[\frac{2011}{5}\right]+\left[\frac{2011}{5^2}\right]+\left[\frac{2011}{5^3}\right]+\ldots=402+80+16+3=501$.

3. **(Мисак Данило)** На столі лежать цукерки. За один хід Петрик може забрати зі столу кілька з них. Першим ходом він забирає рівно одну цукерку, а кожного наступного ходу може забрати або стільки ж цукерок, як під час попереднього ходу, або вдвічі більше. За яку найменшу кількість ходів Петрик зможе забрати зі столу рівно 2011 цукерок?

Відповідь: 17.

Розв'язання. Відзначимо, що кількість цукерок, яку може забрати Петрик на довільному ході, завжди є степенем двійки. Крім того, якщо петрик на якомусь ході забрав зі столу 2^n цукерок, то були й ходи, на яких він забирав $2,4,\ldots,2^{n-1}$ цукерок. Звідси випливає, що максимальна кількість цукерок, яку брав Петрик за один хід, не може перевищувати 512, оскільки сума $1+2+4+\ldots+1024=2047>2011$.

Вважатимемо, що Петрик дотримується стратегії, що дозволяє йому забрати зі столу 2011 цукерок якнайшвидше. Помітимо, що кількість ходів, протягом яких Петрик забирав зі столу рівно 2^n цукерок, не може перевищувати 2, адже в іншому разі замість того, щоб двічі брати по 2^n цукерок, Петрик міг би взяти додатковий раз 2^{n+1} цукерок і скоротити кількість ходів. Звідси випливає, що (якщо Петрик дотримується оптимальної стратегії) максимальна кількість цукерок, які брав Петрик за один хід, не може бути меншою за 512, адже навіть подвоєна сума $2\cdot(1+2+4+\ldots+256)=1022<2011$.

Отже, під час своїх ходів Петрик брав $1,2,\ldots,512$ цукерок, причому кожну таку кількість хлопець брав або раз, або двічі. Запишемо це так: $a_0+2a_1+4a_2+\ldots+512a_9=2011$, де $a_i\in\{1,2\}$ — кількість разів, які хлопець брав по 2^i цукерок. Ця рівність рівносильна такій: $a'_0+2a'_1+4a'_2+\ldots+512a'_9=2011-(1+2+4+\ldots+512)=988$, де $a'_i=a_i-1, a'_i\in\{0,1\}$. Але, з огляду на однозначність запису числа в двійковій системі числення, остання рівність можлива лише при таких значеннях $a'_i, i=0,\ldots,9$: $0,0,1,1,1,0,1,1,1,1$, бо

$$988=512+256+128+64+16+8+4.$$

Отже $a_i, i=0,\ldots,9$, мають значення $1,1,2,2,2,1,2,2,2,2$, і загальна кількість ходів, які зробив Петрик, дотримуючись оптимальної стратегії, складає $3\cdot 1+7\cdot 2=17$.

4. **(Задача 9–4)**

5. **(Серпинський Вацлав)** Знайти усі трійки простих чисел p,q,r, для яких виконується рівність:

$$p(p+1)+q(q+1)=r(r+1).$$

Відповідь: $p=2, q=2, r=3$.

Розв'язання. Без обмеження загальності будемо вважати, що $p \le q$, крім того очевидно, що $r > p$. Тоді задану в умові рівність можна переписати таким чином:

$$p(p+1) = (r-q)(r+q+1). \qquad (1)$$

Оскільки p – просте число, то на нього ділиться або $r-q$, або $r+q+1$. Якщо на p ділиться $r-q$, то $r-q \ge p$, звідки

$$p(p+1) \le (r-q)(r-q+1) < (r-q)(r+q+1),$$

що суперечить рівності (1).

Нехай тепер $r+q+1$ ділиться на p. Якщо $p=2$, то $r+q+1$ повинно бути парним, звідси випливає, що r – непарне, тому q – парне, звідки єдина можливість $q=2$, тоді легко знаходимо, що $r=3$.

Залишився випадок, коли $p>2$, нехай $r+q+1=kp$, при цьому r та q також непарні, звідки і k повинно бути непарним, крім того очевидно, що $k>1$. Тоді $p+1=k(r-q)$. Звідси випливає, що $k^2(r-q)=kp+k$ або $r+q+1+k=k^2r-k^2q$, групуючи коефіцієнти одержимо, що

$$(k^2+1)q = (k^2-1)r-(k+1).$$

Права частина ділиться на $(k+1)$, тому ділиться також і ліва, оскільки k – непарне, то $\frac{q(k^2+1)}{2}$ ділиться на $\frac{k+1)}{2}$. Якщо позначити через (a,b) – НСД чисел a та b, будемо мати, що

$$\left(\frac{k^2+1}{2}, \frac{k+1}{2}\right) = \left(\frac{k^2+1}{2} - \frac{(k-1)(k+1)}{2}, \frac{k+1}{2}\right) = \left(1, \frac{k+1}{2}\right) = 1.$$

Тобто числа $\frac{k^2+1}{2}$ та $\frac{k+1}{2}$ взаємно прості, тому на $\frac{k+1}{2}$ ділиться q, а оскільки $k>1$, то й $\frac{k+1}{2} > 1$, з простоти числа q випливає, що $q = \frac{k+1}{2}$.

Таким чином маємо, що $r = kp-q-1$ та $q=\frac{k+1}{2}$. Послідовно це підставимо у рівність $p+1=k(r-q)$ і одержимо, що $p+1=(kp-k-2)k$. Але остання рівність неможлива, бо з урахуванням того, що $k \ge 3$, $p \ge 3$ маємо:

$$(kp-k-2)k > kp-k-2 = k(p-1)-2 \ge 3(p-1)-2 = p+(2p-5) \ge p+1.$$

Одержана суперечність показує, що знайдений вище розв'язок – єдиний.

5.1. **(Фольклор)** Відомо, що для двох натуральних чисел m, n виконується рівність:

$$m+n = [m,n]+(m,n),$$

де через $[m,n]$ та (m,n) відповідно позначені найменше спільне кратне та найбільший спільний дільник чисел m, n.

Доведіть, що одне з чисел m, n кратне іншому.

Розв'язання. Нехай $d=(m,n)$, тоді $m=ad$, $n=bd$, а з добре відомої формули $mn=[m,n]\cdot(m,n)$ маємо, що $[m,n]=abd$. Тоді маємо рівність: $abd+d=ad+bd \Leftrightarrow d(a-1)(b-1)=0$, яка можлива лише за умови $a=1$ або $b=1$, кожна з яких доводить потрібне твердження.

11 клас

1. **(Фольклор)** При якому найменшому натуральному n вираз $n^3+n^2+330n+330$ ділиться націло на 2011?

Відповідь: $n=41$.

Розв'язання. Оскільки вираз розкладається на множники таким чином: $n^3+n^2+330n+330=(n+1)(n^2+330)$, то для того, щоб він ділився націло на просте число 2011, треба щоб один з множників ділився націло на 2011. Знайдемо, при яких найменших $n\in\mathbb{N}$ це можливе.

Для $n+1$ очевидно, що найменше значення $n=2010$, а для n^2+330, оскільки n^2 зростає, простим підбором знаходимо, що при $n=41$ маємо рівність $n^2+330=2011$, тому це значення і є найменше.

2. **(Клурман Олексій)** Для додатних чисел a,b,c доведіть нерівність:

$$(a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2\geq 3\left(1+a\sqrt[3]{b}+b\sqrt[3]{c}+c\sqrt[3]{a}\right).$$

Розв'язання. З нерівності між середніми запишемо такі три нерівності:

$$\begin{cases} a+a^2+b\geq 3a\sqrt[3]{b},\\ b+b^2+c\geq 3b\sqrt[3]{c},\\ c+c^2+a\geq 3c\sqrt[3]{a}.\end{cases}$$

Залишається додати ці три нерівності і відповідним чином згрупувати доданки.

3. **(Задача 10–3)**

4. **(Білецький Юрій)** У трьох колах, що попарно дотикаються зовнішнім чином, провели співнапрямлені діаметри A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 (тобто кожен з чотирикутників $A_1B_1B_2A_2$ та $A_1C_1C_2A_2$ є паралелограмом або трапецією, у якої відрізок A_1A_2 є основою). Доведіть, що A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 перетинаються в одній точці.

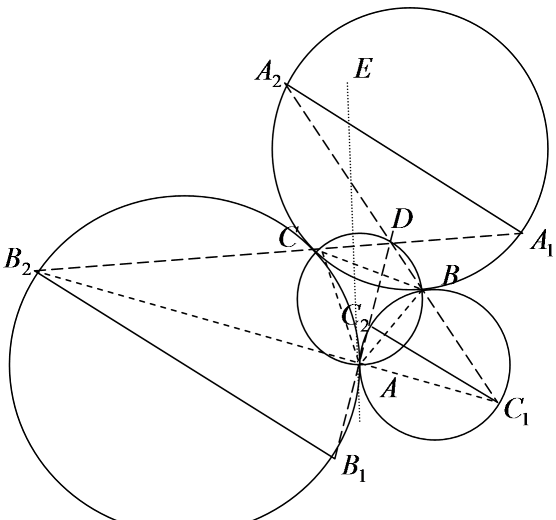

Рис. 8

Розв'язання. Нехай кола з діаметрами B_1B_2, C_1C_2 дотикаються в точці A. Аналогічно визначаються точки B, C (рис.8). Оскільки точка дотику двох кіл – центр гомотетії, що переводить одне коло в інше, то $A=B_1C_2\cap B_2C_1$ і тд. Нехай $D=A_2C_1\cap A_1B_21$. Точки A,B,C,D лежать на одному колі, оскільки $\angle CDB=\angle B_2DC_1=\pi-\angle DB_2C_1-\angle DC_1B_2=\pi-\angle CAE-\angle BAE=\pi-\angle CAB$, де E – точка на спільній дотичній до кіл з діаметрами B_1B_2, C_1C_2, отже A_2C_1, A_1B_2 перетинаються на описаному колі $\triangle ABC$. Аналогічно на ньому перетинаються A_2B_1, B_2C_1. Покажемо, що точки A,B,C та $F=A_1B_2\cap D_1C_2$ також циклічні:

$$\angle CFA=\angle FA_1C_2+\angle FC_2A_1=\angle CA_1B+\angle FC_2B=\angle CA_1B+\angle BC_1A=$$

$$=\angle CBE_1+\angle E_1BA=\angle CBA.$$

Але крім точки C пряма A_1B_2 перетинає це коло лише в точці D, тому A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 перетинаються у ній.

5. **(Задача 10–5)**

5.1. **(Задача 10–5.1)**