

# Многочлени

І хай це надихне вас на подвиг!

*Бел Кауфман*

1. Довести тотожність  $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$ .
2. Якщо значення двох многочленів степені  $n$  співпадають в  $n + 1$  точці, то ці многочлени рівні.
3. Довільний многочлен  $P(x)$  помножили на  $x - 1$ . Чи можуть у добутку всі коефіцієнти бути додатними?
4. Числа  $a$  і  $b$  такі, що многочлен  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$  має корінь  $2$ . Знайти хоча б один корінь многочлена  $x^3 + bx^2 + ax + 1$ .
5. Довести, що число  $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$  ірраціональне.
6. Довести, що якщо число  $2 + \sqrt{3}$  є коренем многочлена з цілими коефіцієнтами, то і  $2 - \sqrt{3}$  також є його коренем.
7. Знайти многочлен з цілими коефіцієнтами, коренем якого буде число  $\sqrt{3} + \sqrt[3]{5}$ .
8. Знайти многочлен  $P(x)$ , для якого  $P(x + 1) - P(x) = x$  для усіх  $x \in \mathbb{R}$ .
9.  $P(x), Q(x)$  — многочлени з цілими коефіцієнтами, причому кожен з них має принаймні один непарний коефіцієнт. Довести, що у добутку  $P(x)Q(x)$  також є хоча б один непарний коефіцієнт.
10. Усі коефіцієнти многочлена — цілі числа від  $-9$  до  $9$ . Довести, що він не може мати кореня, більшого  $10$ .
11. Многочлен  $P(x)$  приймає лише невід'ємні значення. Довести, що його степінь парна.
12. Для довільного многочлена  $P(x)$  розглянемо послідовність  $P(0), P(1), P(2), \dots$ . Складемо послідовність різниць, написавши під кожними двома числами їхню різницю:  $P(1) - P(0), P(2) - P(1), P(3) - P(2), \dots$ . Аналогічно утворимо послідовність других різниць і т.д. Довести, що рано чи пізно ми одержимо послідовність, що міститиме лише нулі.
13. Рівняння  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$  має  $n$  різних дійсних коренів. Довести, що i)  $a_{n-1}^2 \geq \frac{2n}{n-1} a_n a_{n-2}$ ; ii)  $a_1^2 \geq \frac{2n}{n-1} a_2 a_0$ .
14. Многочлен  $P(x)$  такий, що многочлен  $P(x^n)$  ділиться на  $x - 1$ . Довести, що  $P(x)$  також ділиться на  $x - 1$ .
15. Знайдіть усі многочлени  $P(x)$  такі, що  $16P(x^2) = P(2x)^2$ .
16. Знайдіть усі многочлени  $P(x)$  такі, що  $(x + 1)P(x) = (x - 10)P(x + 1)$ .
17. Довести, що усі корені многочлена  $f(x) = x(x - 2)(x - 4)(x - 6) + (x - 1)(x - 3)(x - 5)(x - 7)$  дійсні.
18. Многочлен  $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$  приймає значення  $\pm 1$  при трьох різних цілих  $x$ . Довести, що многочлен  $P(x)$  не має цілих коренів.
19. Знайти площу трикутника, довжини сторін якого є коренями рівняння  $x^3 - 10x^2 + 31x - 29 = 0$ .
20. Розв'язати рівняння  $\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} = 2 - \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}$ .
21. Дійсні числа  $a, b, c$  такі, що  $abc = 1$ ,  $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ . Довести, що одне з чисел дорівнює  $1$ .
22.  $\deg P(x) = 4$ ,  $P(1) = P(-1), P(2) = P(-2)$ . Довести, що  $P(x) = P(-x)$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ . Спробуйте узагальнити цей результат.
23.  $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$  і відомо, що існують  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  такі, що  $P(a) = 1, P(b) = 2, P(c) = 3$ . Довести, що для усіх  $x \in \mathbb{Z}$   $P(x) \neq 5$ .

1. Теорема Безу. Ділення многочленів кутом.
2. Пошук раціональних коренів.
3. Теорема Вієта
4. Основна теорема алгебри
5.  $P(a) - P(b) : a - b$