Теорема Ейлера

Давайте боротися за те, щоб успішність кожного школяра була вищою за середню!

„Читайте Ейлера, читайте Ейлера, це наш спільний учитель.“

Лаплас

Означення. Функцією Ейлера $\varphi(m)$ від натурального числа m будемо називати кількість натуральних чисел, що не перевищують m та взаємно прості з m. Наприклад, $\varphi(6) = 2, \varphi(11) = 10$.

Теорема Ейлера. Якщо $(a, m) = 1$, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$.

Якщо $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$, то

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_n}\right).$$

Чому остання формула правильна? Раніше, ми з вами вже навчилися доводити, що $\varphi(p) = p - 1$, $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$. Оскільки p - просте, то це має бути дійсно просто. Так і є. Трохи складніше зрозуміти, чому для взаємно простих m і n виконується $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

Тепер чому теорема Ейлера правильна? Доведемо її за аналогією до теореми Ферма. Розглянемо усі остачі за модулем m, що взаємно прості з m. Скільки їх буде? Правильно. Назвемо ці числа $m_1, m_2, \dots, m_{\varphi(m)}$. Далі візьмемо оте a, що взаємно просте з m, і розглянемо числа

$$m_1 a, m_2 a, \dots, m_{\varphi(m)} a.$$

Усі вони продовжують бути взаємно простими з m і усі дають різні остачі за модулем m. Чому? Ну, далі, думаю, ясно.

1. Довести, що $7^{80} - 3^{40}$ ділиться на 100.
2. Чи існує таке $n \in \mathbb{N}$, що 3^n матиме у своєму записі принаймні 2012 нулів? (Новий погляд на відому задачу).
3. Довести, що, якщо n — непарне, то $n \mid 2^{n!} - 1$.
4. Довести, що для усіх $k \in \mathbb{N}$ існує $n \in \mathbb{N}$ таке, що $2^n - 1$ має принаймні k простих дільників.

5. Довести, що для усіх $n \in \mathbb{N}$ число $19 \cdot 8^n + 17$ не є простим. (Я теж не знаю, до чого тут теорема Ейлера).

6. $p > 5$ — просте. Відомо, що $p \mid a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$. Довести, що $5 \mid p - 1$.

7. Чи буде простим число $257^{1092} + 1092$?

8. Довести, що для будь-якого простого p існує нескінченна кількість чисел виду $2^n - n$, що діляться на p.

   А тепер найцікавіше: наступна задача теж має відношення до теореми Ейлера.

9. У квадраті відмітили 20 точок і відрізками, що не перетинаються, з'єднали їх між собою і з вершинами квадрата так, що квадрат розбився на трикутники. Скільки вийшло трикутників?

Я вирішив, що раптом вам цього буде замало, тому додаю ще трохи задач.

1. Довести, що $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ ділиться на 133.

2. Знайдіть усі натуральні n, для яких $n2^n + 1$ ділиться на 3.

3. Взяли 100 чисел. Серед їхніх усіх можливих добутків по два числа виявилося 1000 від'ємних. Скільки серед цих чисел було нулів?

4. Послідовність $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ визначається так: $a_1 = 2, a_2 = 3, a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Знайти a_{2012}.

5. Доведіть мультиплікативну властивість для $\tau(n)$ — кількості натуральних дільників числа n. Тобто, що, якщо $(m, n) = 1$, то $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$