# Тренувальні задачі

1. Для додатніх чисел $a, b$ доведіть нерівність

$$(1+\frac{a}{b})^{2014}+(1+\frac{b}{a})^{2014} \geq 2^{2015}$$

2. У змаганні приймає участь 2010 програмістів. У кожному раунді усі програмісти поділяються на 2 команди, з рівною кількістю учасників. Знайдіть мінімальну кількість раундів, які повинні пройти, щоб кожні два програмісти принаймні у одному з раундів були у різних командах?

3. а) Відомо, що для чотирьох натуральних чисел $a, b, c, d$ виконується умова: кожне з чисел $ab, bc, cd, da$ є повним кубом натурального числа. Чи обов'язково кожне з чисел $a, b, c, d$ також є кубом натурального числа.

   б) Відомо, що для п'яти натуральних чисел $a, b, c, d, e$ виконується умова: кожне з чисел $ab, bc, cd, de, ea$ є повним кубом натурального числа. Чи обов'язково кожне з чисел $a, b, c, d, e$ також є кубом натурального числа.

4. В компанії з $2N$ хлопчиків та 6 дівчаток для кожної пари дівчаток рівно $N$ хлопчиків знайомі з однією з них та не знайомі з іншою. Довести, що кількість хлопчиків, знайомих з усіма дівчатами, не перевищує $\frac{N}{3}$.

5. На сторонах $AC$ и $BC$ неравнобедренного треугольника $ABC$ во внешнюю сторону построены как на основаниях равнобедренные треугольники $AB'C$ и $CA'B$ с одинаковыми углами при основаниях, равными $\phi$. Перпендикуляр, проведенный из вершины $C$ к отрезку $A'B'$, пересекает серединный перпендикуляр к отрезку $AB$ в точке $C_1$. Найдите угол $AC_1B$.

6. Знайдіть усі прості числа $p$, при яких число $\sqrt{5^p+4p^4}$ є цілим.

7. Натуральні числа $x, y$ задовольняють умову $3x^2+x=4y^2+y$. Доведіть, що $x-y$ є квадратом цілого числа.

8. Внутри круга отмечены 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что их можно разбить на пары и провести прямую через каждую пару так, чтобы все точки пересечения прямых лежали в круге.

9. У колі проведена хорда $AB$, на якій обрана точка $P$ таким чином, що $AP=2PB$. Хорда $DE$ перпендикулярна хорді $AB$ і проходить через точку $P$. Довести, що середина відрізку $AP$ є точкою перетину висот трикутника $AED$.

10. Назвемо заповнення квадрату $2013 \times 2013$, розбитого на одиничні квадратики, „правильним", якщо його заповнено числами $1, 2, \ldots, 2013$ таким чином, що у кожному рядку та у кожному стовпчику присутнє кожне з цих чисел. Розглянемо відстань від центральної клітини до найближчої клітини з числом 1 (під відстанню розуміється найменше число ходів, які потрібні шаховому королю, щоб дістатись до клітинки). Яке найбільше значення може приймати така відстань?

11. Нехай $O$ — середина сторони $AB$ трикутника $ABL$. Серединні перпендикуляри, проведені до відрізків $AO$ та $BL$, перетинаються в точці $V$, а серединні перпендикуляри, проведені до відрізків $AL$ та $BO$, перетинаються в точці $E$. Довести, що $LO \perp VE$.

12. Прямая $l$ — серединный перпендикуляр к биссектрисе $AL_1$ треугольника $ABC$. Внешняя и внутренняя биссектрисы угла $B$ пересекают $l$ в точках $B_1$ и $B_2$, а внешняя и внутренняя биссектрисы угла $C$ — в точках $C_1$ и $C_2$. Докажите, что углы $B_1AB_2$ и $C_1AC_2$ равны.

13. Для додатніх чисел $a, b$ доведіть нерівність

$$\frac{c^2(b+a-c)}{a+b}+\frac{a^2(c+b-a)}{b+c}+\frac{b^2(a+c-b)}{a+c}\leq\frac{ab+bc+ca}{4}.$$