Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Інститут інноваційних технологій і змісту освіти

LII Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики
Вказівки до розв'язання задач
Перший день

8.1. Зобразіть (з обґрунтуванням) на координатній площині xOy множину всіх точок $M(x;y)$, координати яких задовольняють рівність $|y-x| = 2-y-x$.

Розв'язання. Вихідне співвідношення рівносильне системі

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=1, \\ x=1; \end{array}\right. \\ y \le 2-x. \end{cases}$$

Слід зобразити множину точок $\{(x;1):\ x\le 1\} \cup \{(1;y):\ y\le 1\}$.

8.2. Троє хлопчиків збирали горіхи. Коли вони порахували, що загалом зібрано 420 горіхів, то вирішили поділити їх порівну. Спочатку перший з хлопчиків віддав кожному з двох інших по одній четвертій частині зібраних ним горіхів і ще по одному горіху, потім другий хлопчик віддав кожному з двох інших по одній четвертій частині горіхів, що утворилися в нього, і ще по одному горіху. Після того, як таке ж саме зробив і третій хлопчик, з'ясувалося, що їм насправді вдалося поділити горіхи порівну. Визначте, скільки горіхів зібрав кожен з хлопчиків. Відповідь обґрунтуйте.
Розв'язання. З рівностей

$$x_3 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_3 - 2 = 140,\ x_2 + \frac{1}{4}x_3 + 1 = 140,\ x_1 + \frac{1}{4}x_3 + 1 = 140$$

знайдемо кількість горіхів у кожного з хлопчиків на передостанньому етапі. Аналогічно відновлюємо весь «ланцюжок»:

$$(140, 140, 140) \leftarrow (68, 68, 284) \leftarrow (32, 140, 248) \leftarrow (68, 122, 230).$$

Відповідь: перший хлопчик зібрав 68 горіхів, другий хлопчик — 122 горіхи, третій хлопчик — 230 горіхів.

8.3. Чи можна в таблиці розміром 7×7 розставити 24 одиниці та 25 нулів (у кожній клітинці записується одне число) так, щоб для будь-якої клітинки, у якій міститься одиниця, сума чисел у сусідніх з нею клітинках дорівнювала 1, а для будь-якої клітинки, у якій знаходиться нуль, сума чисел у клітинках, сусідніх з нею, була відмінною від 1 (дві клітинки вважаються сусідніми, якщо вони мають спільну сторону)? Відповідь обґрунтуйте.
Відповідь: так, можна (див. рис.).

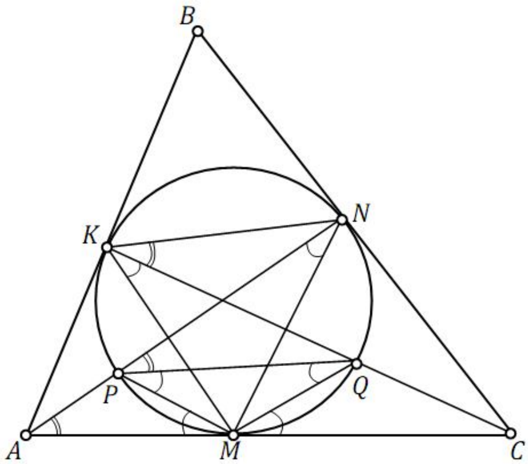
1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1

8.4. Нехай вписане коло трикутника ABC дотикається до його сторін AB, BC і CA в точках K, N і M відповідно, причому відомо, що $\angle MKC = \angle MNA$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

Розв'язання. Нехай прямі AN і CK вдруге перетинають вписане коло трикутника ABC в точках P і Q відповідно. За теоремами про вписаний кут та кут між дотичною й хордою одержуємо:

$$\angle PNM = \angle PQM = \angle PMA,$$
$$\angle QKM = \angle QPM = \angle QMC.$$

За умовою задачі, $\angle PNM = \angle QKM$, а тому $PQ \parallel AC$. Звідси випливає, що $\angle CAN = \angle QPN = \angle QKN = \angle CKN$, тобто $\angle CAN = \angle CKN$. Це означає, що навколо чотирикутника $AKNC$ можна описати коло, і $\angle CAK = \angle BNK$, $\angle ACN = \angle BKN$. Трикутник KBN є рівнобедреним, тобто $\angle BNK = \angle BKN$. Отже, $\angle CAK = \angle ACN$.



9.1. Зобразіть (з обґрунтуванням) на координатній площині xOy множину всіх точок $M(x;y)$, координати яких задовольняють рівність $\left|y-[x]\right| = 2 - y - [x]$, де $[x]$ — ціла частина числа x, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує x.

Розв'язання. Вихідне співвідношення рівносильне системі

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=1, \\ [x]=1; \end{array}\right. \\ y \le 2-[x]. \end{cases}$$

Слід зобразити множину точок $\{(x;y):\ 1\le x<2,\ y<1\} \cup \{(x;1):\ x<2\}$.

9.2. Нехай $f(x) = \dfrac{x^3}{3x^2-3x+1}$. Обчисліть значення суми

$$f\left(\frac{1}{2012}\right) + f\left(\frac{2}{2012}\right) + \ldots + f\left(\frac{2012}{2012}\right).$$

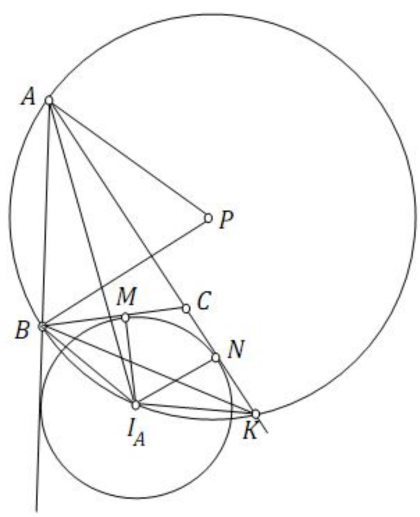
Розв'язання. Зауважимо, що $f\left(\dfrac{i}{2012}\right) = \dfrac{i^3}{i^3+(2012-i)^3}$, $1 \le i \le 2012$. Тоді

$$f\left(\frac{1006}{2012}\right) = \frac{1}{2},\ f\left(\frac{2012}{2012}\right) = 1,\ f\left(\frac{i}{2012}\right) + f\left(\frac{2012-i}{2012}\right) = 1,\ 1 \le i \le 1005.$$

Відповідь: $\dfrac{2013}{2}$.

9.3. Дано трикутник ABC. Нехай I_A — центр кола, яке дотикається до сторони BC і до продовжень сторін AB і AC за точки B і C відповідно. Доведіть, що точки B, C та центри описаних кіл трикутників ABI_A і ACI_A лежать на одному колі.

Розв'язання. Нехай точка P — центр описаного кола трикутника ABI_A. Кут ABI_A тупий, а тому точки P і B лежать по різні боки від прямої AI_A. Нехай M і N — точки дотику даного кола зі стороною BC і продовженням сторони AC відповідно, а K — точка перетину цього продовження з описаним колом трикутника ABI_A (див. рис.). Оскільки $I_AM = I_AN$ і $BI_A = KI_A$, то прямокутні трикутники BMI_A та KNI_A рівні, а тому $BM = KN$. Оскільки $CM = CN$, то $BC = CK$, тобто трикутник BCK рівнобедрений. Нехай $\angle BCA = \gamma$, тоді $\angle BKC = \frac{\gamma}{2}$, $\angle BPA = \gamma$. Отже, $\angle BCA = \angle BPA$, а це й означає, що точка P належить описаному колу трикутника ABC. Аналогічно доводиться, що центр описаного кола трикутника ACI_A також лежить на цьому колі. Це й завершує доведення.



9.4. Знайдіть найменше натуральне число n, для якого в кожній клітинці таблиці розміром $n \times n$ можна записати ціле число з відрізка $[-30; 30]$ так, щоб усі цілі числа цього відрізка виявилися записаними, причому ані в жодному рядку, ані в жодному стовпці не знайшлося пари чисел з від'ємним добутком. Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання. Для $n = 11$ приклад легко наводиться: лівий верхній прямокутник розміром 5×6 заповнюється числами $1, 2, \ldots, 30$ у довільному порядку, правий нижній прямокутник розміром 6×5 заповнюється числами $-1, -2, \ldots, -30$ у довільному порядку, і до решти клітинок записуються нулі. Доведемо, що для $n \le 10$ це неможливо. Якщо додатні цілі числа з відрізка $[-30; 30]$ розташовані в k стовпцях і m рядках, то всього клітинок з додатними числами буде не більше за km. Зрозуміло, що клітинок з від'ємними числами — не більше за $(n-k)(n-m)$. Оскільки

$$\sqrt{k(n-k)} \le \frac{k+(n-k)}{2} = \frac{n}{2},\ \sqrt{m(n-m)} \le \frac{m+(n-m)}{2} = \frac{n}{2},\ km(n-k)(n-m) \le \frac{n^4}{16},$$

то хоча б одне з чисел km, $(n-k)(n-m)$ не перевищує $\frac{n^2}{4}$. Але якщо $n \le 10$, то $\frac{n^2}{4} < 30$, і тому записати принаймні один раз кожне ціле число з відрізка $[-30; 30]$ ми не зможемо.

Відповідь: $n = 11$.

10.1. Нехай a, b і c — натуральні числа. Доведіть, що хоча б одне з чисел $a^5b - ab^5$, $b^5c - bc^5$ чи $c^5a - ca^5$ ділиться без остачі на 8.

Розв'язання. Серед трьох чисел a, b і c існують два числа, які мають однакову парність. Будемо вважати, що це числа a і b. Тоді числа $a-b$, $a+b$, a^2+b^2 є парними, і $a^5b - ab^5 = ab(a-b)(a+b)\left(a^2+b^2\right) \vdots 8$.

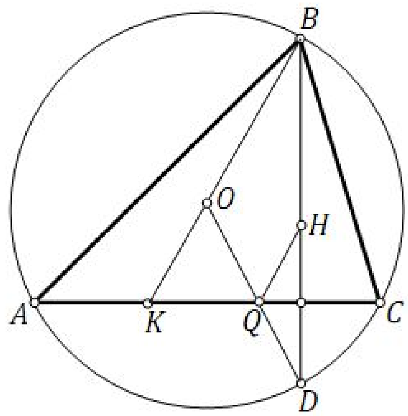
Зауваження. Неважко довести, що в розглядуваному випадку $a^5b - ab^5 \vdots 16$.

10.2. Знайдіть усі визначені на всій числовій прямій функції f, які набувають дійсних значень, і такі, що для будь-яких дійсних x, y і z

$$f(xy)+f(xz)\geq f(x)f(yz)+1.$$

Розв'язання. Покладемо у вихідній нерівності $x=y=z=0$. Тоді $(f(0)-1)^2\leq 0$, тобто $f(0)=1$. Візьмемо $y=z=0$ і одержимо, що $f(0)+f(0)\geq f(x)f(0)+1$. Звідси $f(x)\leq 1$ для всіх $x\in\mathbf{R}$. Якщо $x=y=z=1$, то $(f(1)-1)^2\leq 0$, $f(1)=1$. Для $y=z=1$ маємо: $f(x)+f(x)\geq f(x)f(1)+1$, $f(x)\geq 1$, $x\in\mathbf{R}$. Ми встановили, що для всіх $x\in\mathbf{R}$ $f(x)=1$. Перевірка показує, що така функція задовольняє умову задачі.
Відповідь: $f(x)=1$, $x\in\mathbf{R}$.

10.3. Нехай O — центр описаного кола гострокутного нерівнобедреного трикутника ABC. Прямі BO і CO перетинають сторони AC і AB в точках K і N відповідно. На сторонах AC і AB взято такі відмінні від K і N точки P і T відповідно, що $OK=OP$ і $ON=OT$. Через точку P проведено пряму, паралельну BK, а через точку T — пряму, паралельну CN, і позначимо через M точку перетину цих прямих. Доведіть, що радіуси описаних кіл трикутників AMB, BMC і CMA рівні.
Розв'язання. Нехай H — ортоцентр трикутника ABC, точка D симетрична H відносно прямої AC. Як відомо, точка D лежить на описаному колі трикутника ABC. Позначимо через Q точку перетину відрізків OD і AC. Тоді маємо: $\angle QDH=\angle QHD=\angle OBD$.



Звідси випливає, що $HQ \parallel BK$, і $\angle BKC=\angle HQC$. Отже, $\angle HQC=\angle DQC=\angle OQK=\angle BKC$, а тому точки P і Q співпадають. Ми довели, що пряма, проведена через точку P паралельно BK, проходить через точку H. Аналогічно доводиться, що точка H лежить і на прямій, що проходить через точку T паралельно CN. Відтак, точка M з умови задачі є ортоцентром трикутника ABC. Рівність радіусів описаних кіл трикутників AMB, BMC і CMA є наслідком властивостей *кола дев'яти точок* (названі трикутники та трикутник ABC мають спільне коло дев'яти точок, а радіус кола дев'яти точок будь-якого трикутника вдвічі менший за радіус його описаного кола). До того ж, рівність радіусів описаних кіл трикутників ABC, AMB, BMC і CMA легко встановлюється за допомогою узагальненої теореми синусів.

10.4. Нехай $n\geq 3$ — задане натуральне число. Послідовність із $2n$ чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ будемо називати *вдалою*, якщо виконуються такі три умови:

1) усі числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ є попарно різними елементами множини $\{1, 2, \ldots, n\}$;

2) $a_k=a_{n+k}$ для всіх $k=1, 2, \ldots, n$;

3) існують такі $i_1 < i_2 < ... < i_n$ із множини $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, що $a_{i_k} = k$ для всіх $k = 1, 2, \ldots, n$.

Наприклад, для $n = 5$ послідовність $\underline{1}$, 3, 4, $\underline{2}$, 5, 1, $\underline{3}$, $\underline{4}$, 2, $\underline{5}$ є вдалою, а послідовність 2, 1, 3, 5, 4, 2, 1, 3, 5, 4 — ні. Для кожного $n \geq 3$ знайдіть кількість вдалих послідовностей.

Розв'язання. Через m, $0 \leq m \leq n$, позначимо кількість чисел множини $\{1, 2, \ldots, n\}$, які знаходяться серед індексів $i_1 < i_2 < ... < i_n$. Неважко довести, що такими m індексами визначаються $n - m$ чисел із множини $\{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$, які увійдуть до даного набору індексів $i_1 < i_2 < ... < i_n$. Цим повністю описуються всілякі *вдалі* послідовності $a_1, a_2, ..., a_{2n}$. Для $m = 0$ маємо вдалу послідовність $1, 2, \ldots, n, 1, 2, \ldots, n$. Але ж ця сама вдала послідовність утворюється ще в n випадках, коли для набору індексів $i_1 < i_2 < ... < i_n$ маємо, що $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \cap \{1, 2, \ldots, n\} = \{1, 2, \ldots, m\}$, $1 \leq m \leq n$. Усіляких підмножин n-елементної множини $\{1, 2, \ldots, n\}$, відмінних від підмножин $\{1, 2, \ldots, m\}$, $1 \leq m \leq n$, існує $2^n - n$. Усім таким підмножинам відповідають різні вдалі послідовності (порожня підмножина відповідає випадку $m = 0$ і також враховується серед $2^n - n$ підмножин).

Відповідь: $2^n - n$.

11.1. Для дійсних чисел $x \in (0; \pi)$ і $y \in (0; \pi)$ має місце рівність

$$\cos 2x \cos y - \cos 2y \cos x = \cos y - \cos x.$$

Доведіть, що $x = y$.

Розв'язання. Запишемо дану рівність у вигляді

$$\cos^2 x \cos y - \cos^2 y \cos x = \cos y - \cos x, \ (\cos x \cos y + 1)(\cos x - \cos y) = 0.$$

Оскільки для $x \in (0; \pi)$ і $y \in (0; \pi)$ $\cos x \cos y > -1$, то $\cos x = \cos y$, і тому, враховуючи монотонність функції $f(t) = \cos t$ на проміжку $(0; \pi)$, маємо, що $x = y$.

11.2. Дано таку визначену на всій числовій прямій функцію f, яка набуває дійсних значень, що для всіх $x \in \mathbf{R}$ і $y \in \mathbf{R}$ справджується рівність

$$f(x + 2xy) = f(x) + 2f(xy).$$

Знайдіть значення $f(2012)$, якщо відомо, що $f(2011) = 2012$.

Розв'язання. Підставимо $x = 0$ і одержимо, що $f(0) = 0$. Підставляючи до нашого функціонального рівняння $y = -1$ та $y = -\frac{1}{2}$, одержимо, що $f(-x) = -f(x)$ та $f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$ для будь-яких дійсних x. Далі, підставимо $y = \frac{z}{2x}$, де $x \neq 0$, і одержимо, що $f(x+z) = f(x) + f(z)$. Оскільки $f(0+z) = 0 + f(z) = f(0) + f(z)$, то рівність $f(x+z) = f(x) + f(z)$ має місце для всіх дійсних x і z (позаяк кожен розв'язок *функціонального рівняння адитивності*, очевидно, задовольняє умову $f(x + 2xy) = f(x) + 2f(xy)$, то ми встановили, що множини розв'язків цих рівнянь співпадають). Легко довести, що $f(kx)=kf(x)$ для довільних $x\in\mathbf{R}$ і $k\in\mathbf{Z}$. Оскільки $f(2011)=f(2011\cdot 1)=2011f(1)$, і за умовою $f(2011)=2012$, то

$$2012=2011f(1),\ f(1)=\frac{2012}{2011},\ f(2012)=2012f(1)=\frac{2012^2}{2011}.$$

Відповідь: $f(2012)=\dfrac{2012^2}{2011}$.

11.3. Див. задачу 10.4.

11.4. Нехай $SABC$ — така трикутна піраміда, що для точки M перетину медіан її грані ABC виконуються нерівності $MA>1$, $MB>1$ і $MC>1$. Доведіть, що

$$SA+SB+SC>3.$$

Розв'язання. Розглянемо вектори $\overrightarrow{MA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{MB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{MC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{MS}=\vec{s}$, $\overrightarrow{SA}=\vec{a}-\vec{s}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{b}-\vec{s}$ і $\overrightarrow{SC}=\vec{c}-\vec{s}$. За умовою задачі, $\left|\vec{a}\right|>1$, $\left|\vec{b}\right|>1$ і $\left|\vec{c}\right|>1$. Нам потрібно довести нерівність $\left|\vec{a}-\vec{s}\right|+\left|\vec{b}-\vec{s}\right|+\left|\vec{c}-\vec{s}\right|>3$.

Нехай $\left|\vec{s}\right|\ge 1$. Тоді, використовуючи відому рівність $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ та властивості скалярного добутку, маємо:

$$\left|\vec{a}-\vec{s}\right|+\left|\vec{b}-\vec{s}\right|+\left|\vec{c}-\vec{s}\right|\ge-\frac{(\vec{a}-\vec{s})\vec{s}}{\left|\vec{s}\right|}-\frac{(\vec{b}-\vec{s})\vec{s}}{\left|\vec{s}\right|}-\frac{(\vec{a}-\vec{s})\vec{s}}{\left|\vec{s}\right|}=$$

$$=3\left|\vec{s}\right|-\frac{\vec{s}}{\left|\vec{s}\right|}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=3\left|\vec{s}\right|\ge 3.$$

Рівність у цій нерівності досягається тоді й тільки тоді, коли $\left|\vec{s}\right|=1$ і вектори $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ і $\overrightarrow{SC}$ протилежно напрямлені до вектора $\overrightarrow{SM}$, що, зрозуміло, неможливо.

Розглянемо тепер випадок $\left|\vec{s}\right|<1$. Тоді

$$\left|\vec{a}-\vec{s}\right|+\left|\vec{b}-\vec{s}\right|+\left|\vec{c}-\vec{s}\right|\ge\frac{(\vec{a}-\vec{s})\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}+\frac{(\vec{b}-\vec{s})\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}+\frac{(\vec{a}-\vec{s})\vec{c}}{\left|\vec{c}\right|}=$$

$$=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|+\left|\vec{c}\right|-\vec{s}\left(\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}+\frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}+\frac{\vec{c}}{\left|\vec{c}\right|}\right)=$$

$$=3+\left(\left|\vec{a}\right|-1\right)\left(1-\frac{\vec{s}\,\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}\right)+\left(\left|\vec{b}\right|-1\right)\left(1-\frac{\vec{s}\,\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}\right)+\left(\left|\vec{c}\right|-1\right)\left(1-\frac{\vec{s}\,\vec{c}}{\left|\vec{c}\right|}\right)>3.$$

Для останньої оцінки ми врахували, що $1>\left|\vec{s}\right|\ge\dfrac{\vec{s}\,\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}$, $1>\left|\vec{s}\right|\ge\dfrac{\vec{s}\,\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$, $1>\left|\vec{s}\right|\ge\dfrac{\vec{s}\,\vec{c}}{\left|\vec{c}\right|}$.

Задачі запропонували:

О. О. Курченко (8.1, 9.1, 11.1), *В. М. Лейфура* (8.2, 10.1, 11.2), *І. М. Мітельман* (8.3, 9.4), *І. П. Нагель* (10.3), *В. О. Швець* (9.2), *В. А. Ясінський* (8.4, 9.3, 10.2, 10.4=11.3, 11.4).

Матеріали Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики будуть розміщені на сторінці «Юному математику» офіційного сайта

http://www.mechmat.univ.kiev.ua

механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.