Тренувальні збори для групи резерву. Геометрія

Данило Хілько dkhilko@ukr.net

Листопад-грудень 2015

1 Навколо додаткових побудов

1. Дано три неколінеарні точки P, A, B. Точка Q така, що $\angle APQ = 90°$ і $PQ = BQ$. Доведіть, що $\angle AQB - \angle PQA = 2\angle APB$.
2. Точки M and N вибрані на бісектрисі AL трикутника ABC так, що $\angle ABM = \angle ACN = \alpha$. X — точка всередині трикутника така, що $BX = CX$ та $\angle BXC = 2\angle BML$. Доведіть, що $\angle MXN = 2\alpha$.
3. В трикутнику ABC $\angle A = 120°$. Доведіть, що відстань від центра описаного кола до ортоцентра рівна $AB + AC$.
4. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ $AC \perp BD$, $\angle BCA = 10°$, $\angle BDA = 20°$, $\angle BAC = 40°$. Знайдіть $\angle BDC$.
5. Дано рівнобедрений трикутник ABC $(AB = BC)$ з $\angle ABC = 82°$. Нехай M — така точка всередині трикутника, що $AM = AB$ і $\angle MAC = 11°$. Знайдіть $\angle MCB$.
6. В рівнобедреному трикутнику ABC $(AB = BC)$на боковій стороні BC взято точку M так, що відрізок CM дорівнює за довжиною висоті, проведеній до цієї сторони. На AB відмічено точку K таку, що $\angle KMC = 90°$. Знайдіть $\angle ACK$.
7. Дано рівнобедрений прямокутний трикутник ABC $(\angle A = 90°)$. Точку M на відрізку AC обрано довільним чином. Нехай P, Q — основи перпендикулярів з A та C на пряму BM, відповідно. Доведіть, що $BP = PQ + QC$.
8. Дано трапецію $ABCD$, в якій $AB \parallel CD$ і $AB = 2CD$. Коло з центром в D і радіусом DA перетинає перпендикуляр побудований в точці C до прямоъ CD в точках P, Q. Доведіть, що $AP \perp BQ$.
9. Точки E, F — середина сторін BC, CD квадрата $ABCD$. Прямі AE та BF перетнаються в точці P. Доведіть, що $\angle PDA = \angle AED$.
10. Дано гострокутний трикутник ABC. Нехай M — середина сторони AB, а T — сереина меншої дуги BC описаного кола ABC. Точка K всередині трикутника ABC така, що $MATK$ є рівнобокою трапецією, причому $AT \parallel MK$. Доведіть, що $AK = KC$.

2 Навколо вписаних чотирикутників

1. В гострокутному трикутнику ABC провели висоти AA_1, BB_1, CC_1. Доведіть, що проекції точки A_1 на AB, AC, BB_1 та CC_1 лежать на одній прямій.

2. Точки M, N, K — середини сторін BC, AC, AB трикутника ABC відповідно. Нехай ω_B та ω_C — два півкола, побудовані на AC та AB як на діаметрах поза трикутником. Прямі MK та MN перетинають ω_C та ω_B в точках X та Y відповідно. Нехай точка Z — перетин дотичних до ω_C та ω_B в точках X та Y відповідно. Доведіть, що $AZ \perp BC$.

3. Дано трикутник ABC. Його вписане коло дотикається сторін AB, BC в точках C_0, A_0. Доведіть, що пряма A_0C_0, бісектриса кута A і середня лінія трикутника, яка є паралельною до AB, перетинаються в одній точці.

4. В трикутнику ABC AA_1 і BB_1 — висоти. На стороні AB вибрано точки M і K так, що $B_1K \parallel BC$ і $A_1M \parallel AC$. Доведіть, що $\angle AA_1K = \angle BB_1M$.

5. В трапеції $ABCD$ $AB = BC = CD$, CH — висота. Доведіть, що перпендикуляр, проведений з H на AC, проходить через середину BD.

6. В рівні кути X_1OY та YOX_2 вписано кола ω_1 і ω_2, які дотикаються сторін OX_1 та OX_2 в точках A_1 і A_2 відповідно, а сторони OY — в точках B_1 і B_2. Точка C_1 — друга точка перетину A_1B_2 і ω_1, а точка C_2 — друга точка перетину A_2B_1 і ω_2. Доведіть, що C_1C_2 — спільна дотична кіл.

7. Нехай I — центр вписаного кола трикутника ABC. Описане коло трикутника BIC перетинає прямі AB і AC в точках E та F відповідно. Доведіть, що пряма EF дотикається кола, яке вписане в трикутник ABC.

8. Нехай X, Y, Z — середини дуг BC, CA, AB описаного кола трикутника ABC відповідно. M — довільна точка на BC, прямі, що проведено через M паралельно внутрішнім бісектрисам кутів $\angle B$, $\angle C$ перетинають зовнішні бісектриси кутів $\angle C$, $\angle B$ в N, P відповідно. Доведіть, що XM, YN, ZP перетинаються в одній точці.

9. Кола S_1 та S_2 перетинаються в точках P та Q. Різні точки A_1 та B_1 (які не співпадають з P або Q) вибираються на S_1. Прямі A_1P та B_1P перетинають S_2 вдруге в A_2 та B_2 відповідно, а прямі A_1B_1 та A_2B_2 перетинаються в C. Доведіть, що за будь-якого положення A_1 та B_1 центри описаних кіл трикутників A_1A_2C лежать на фіксованому колі.

10. Дано рівнобедрений трикутник ABC $(AC = BC)$ з інцентром I. На описаному колі трикутника AIB взято довільну точку P. Прямі, проведені через P паралельно CA та CB, перетинають AB в D та E відповідно. Пряма, проведена через P паралельно AB перетинає CA та CB в F та G відповідно. Доведіть, що прямі DF та EG перетинаються на центрі описаного кола трикутника ABC.

3 Степінь точки та радикальні осі

1. Дано гострокутний трикутник ABC. Точки D та E взято на сторонах AC та BC відповідно так, що точки A, B, D, та E лежать на одному колі. Нехай описане коло трикутника DEC перетинає сторону AB в двох точках X та Y. Доведіть, що середина XY є основою перпендикуляру з C на AB.

2. На медіанах AA_0 та BB_0 гострокутного трикутника ABC побудовано дуги однакової градусної міри в сторону вершини C. Доведіть, що спільна хорда кіл, які містять ці дуги, містить точку C.

3. Вписане коло трикутника ABC дотикається сторін AB, BC, CA в точках C_0, A_0, B_0. На площині взята точка P. Нехай X — точка перетину прямої AB та серединного перпендикуляру до C_0X. Точки Y, Z визначені аналогічно. Доведіть, що X, Y, Z колінеарні.

4. Дано нерівнобоку трапецію $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Коло, яке проходить через точки A та B, перетинає бокові сторони трапеції в точках P, Q, а діагоналі — в точках M і N. Доведіть, що прямі PQ, MN, CD перетинаються в одній точці.

5. В гострокутному треугольнику ABC O — центр описаного кола, A_1, B_1, C_1 — основи висот. На прямих OA_1, OB_1, OC_1 знайшли такі точки A', B', C' відповідно, що чотирикутники $AOBC'$, $BOCA'$, $COAB'$ вписані. Доведіть, що кола, описані навколо трикутників AA_1A', BB_1B', CC_1C' мають спільну точку.

6. В гострокутному трикутнику ABC проведена висота AH. Точки X та Y на сторонах AB та AC відповідно такі, що $AXHY$ паралелограм. Прямі XY та BC перетинаються в точці D. Доведіть, що $DB \cdot DC = DH^2$.