

Алгебра

1. Целые ненулевые числа a, b, c, d таковы, что $a/b + c/d = b/c + d/a$, причем эти четыре дроби несократимы, не являются целыми числами, и не обязательно положительны. Найдите $ad + bc$.
2. Даны положительные числа $a_1 < a_2 < \dots < a_{2015}$. Оказалось, что a_k в пять раз больше среднего арифметического всех чисел. Какое наименьшее значение может принимать k ?
3. Какие простые числа можно представить в виде $|n - 1| + |n - 2| + |n - 3| + |n - 4| + |n - 5|$ при целых n ?
4. Даны числа a_1, a_2, \dots, a_{10} . Известно, что у каждого из десяти квадратных трехчленов $x^2 - a_1x + a_2, x^2 - a_2x + a_3, \dots, x^2 - a_9x + a_{10}, x^2 - a_{10}x + a_1$ не больше одного корня. Докажите, что все числа a_i не превосходят 4.
5. Дан квадратный трехчлен $x^2 - ax + b$, имеющий два ненулевых корня. Известно, что $|b+1| < a$, и один из его корней по модулю меньше 1. Докажите, что другой корень по модулю больше 1.
6. Найдите все простые числа p, q и r , такие что число $p^4 + q^4 + r^4 - 3$ тоже простое.
7. Дано десять различных целых чисел. Для каждой двух чисел подсчитали их разность (большее минус меньшее). Среди этих разностей оказалось ровно 44 различных. Докажите, что одно из исходных десяти чисел равно полусумме двух других.
8. Дано десять различных целых чисел. Для каждой двух чисел подсчитали их разность (большее минус меньшее). Среди этих разностей оказалось ровно 44 различных. Докажите, что одно из исходных десяти чисел равно полусумме двух других.
9. Квадратный трехчлен $f(x)$ переставляет местами различные числа a и b (т. е. $f(a) = b$ и $f(b) = a$). Докажите, что он не переставляет местами никакие другие два числа.
10. Даны квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$. Известно, что уравнение $f(x)g(x) = 0$ имеет ровно один корень, а уравнение $f(x) + g(x) = 0$ — ровно два корня. Докажите, что уравнение $f(x) - g(x) = 0$ не имеет корней.
11. Последовательность $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ состоит из различных натуральных чисел. Известно, что для любых двух различных номеров k и m выполнено неравенство $\text{НОД}(|a_k - a_m|, |k - m|) < 2013$. Найдите наибольшее возможное значение n .