

Похідна та інтеграл працюють

Довести нерівності 1–10.

1. $\ln(2 \sin x) > \frac{1}{2}x(\pi - x) - \frac{5}{72}\pi^2$, де $x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$.
2. $\frac{n^{k+1}}{k+1} < 1^k + 2^k + \dots + n^k < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} \cdot \frac{n^{k+1}}{k+1}$, де $n, k \in \mathbb{N}$.
3. $(a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha} > (a^\beta + b^\beta)^{1/\beta}$, де $a, b > 0$, $0 < \alpha < \beta$.
4. $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$, де $n \in \mathbb{N}$.
5. $\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b}{2}$, де $a, b > 0$ і $a \neq b$.
6. $\frac{a^m - b^m}{a^m + b^m} > \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$, де $a > b > 0$, $m > n$.
7. $1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2k}}{2k!} > 0$, де $k \in \mathbb{N}$.
8. $a^2 + b^2 + c^2 \leq a^3 + b^3 + c^3$, де $a, b, c > 0$ і $abc = 1$ (за допомогою похідної!).
9. $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{a_i a_j}{i+j} \right) \geq 0$, де $a_i \in \mathbb{R}$.
10. $(x + y + z)^{x+y+z} x^x y^y z^z \leq (x + y)^{x+y} (y + z)^{y+z} (z + x)^{z+x}$, де $x, y, z \geq 0$.
11. Знайти мінімум функції $f(x) = \frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^6 - x^3 + 1}$.
12. Скільки дійсних розв'язків має рівняння

$$\sin \sin \sin \sin \sin x = \frac{x}{3}?$$