Комбінаторика чи алгебра?

1. Серед чисел 1, 2, ..., 2010 деякі 500 пофарбовані в білий колір, а інші— в чорний. Доведіть, що кількість послідовностей з 29 чисел одного кольору $(x_1, \ldots, x_{29})$, в яких сума $x_1+\ldots+x_{29}$ ділиться на 2010, не залежить від способу розфарбування (нагадаємо, що у послідовності числа можуть повторюватися).

2. Доведіть, що існує опуклий многокутник з 1990 вершинами, довжини сторін якого рівні $1,4,9\ldots,1990^2$ та всі кути якого рівні між собою.

3. Нехай задано $n > 1$ натуральні числа $n, a_1, \ldots, a_m$, $n > 1$. Для кожного $k = 0, \ldots, n-1$ позначимо $f(k)$ кількість послідовностей із m натуральних чисел $(x_1, \ldots, x_m)$, $1 \le x_i \le a_i, i = 1, \ldots, m,$ таких що $x_1 + \cdots + x_m \equiv k \ (mod\ n)$. Доведіть, що $f(0) = f(1) = \cdots = f(n-1)$ тоді і тільки тоді, коли одне з чисел $a_1, \ldots, a_m$ ділиться на n.

4. Нехай $p > 3 -$ просте число. Позначимо $N(0,1,2)$ кількість послідовностей $\left(x_1, \ldots, x_{p-1}\right)$, $x_i \in \{0, 1, 2\}, i = 1, \ldots, p-1$, таких що

$x_1 + 2x_2 + \cdots + (p-1)x_{p-1} \vdots p$, а кількість аналогічних послідовностей з умовою $x_i \in \{0, 1, 3\}$, $i = 1, \ldots, p-1$ - $N(0,1,3)$. Доведіть, що $N(0,1,2) \le N(0,1,3)$.

5. Доведіть, що якщо в опуклому багатокутнику всі кути рівні, то знайдуться принаймні дві його сторони, кожна з яких має довжину меншу, ніж довжини сусідніх із нею сторін.

6. Дошку 8×9 покривають (без накладання) вертикальними прямокутниками 3×1 та горизонтальними прямокутниками 1×3 із вирізаною центральною клітинкою. Знайдіть множину S із 18 клітинок таку, що якщо для деякого розташування фігурок на дошці не покриті рівно 2 її клітинки, то ці клітинки належать S.