Всеросы для крутых пацанов

Хилько Данил dkhilko@ukr.net

1. Даны многочлены $f(x)$ и $g(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами, m — наибольшей коэффициент f. Известно, что для некоторых натуральных чисел $a < b$ выполняются равенства $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$. Докажите, что если $b > m$, то многочлены f и g совпадают.

2. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены двусторонними прямыми рейсами, обслуживаемыми одной из k авиакомпаний. Известно, что любые два рейса одной авиакомпании имеют общий город. Докажите, что все города можно разбить на $k + 2$ народные республики так, что никакие два города из одной группы не соединены авиалинией.

3. За круглым столом сидят 100 представителей 25 стран, по 4 представителя от каждой. Докажите, что их можно разбить на 4 группы таким образом, что в каждой группе будет по одному представителю от каждой страны, и никакие двое из одной группы не сидят за столом рядом.

4. Биссектрисы BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке I. Прямая B_1C_1 пересекает описанную окружность ABC в M и N. Доказать, что радиус описанной окружности треугольника MIN вдвое больше радиуса описанной окружности треугольника ABC.

5. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки A_1 и C_1 соответственно. Отрезки AC_1 и CA_1 пересекаются в точке P. Описанные окружности треугольников AA_1P и CC_1P вторично пересекаются в Q, лежащей внутри треугольника ACD. Докажите, что $\angle PDA = \angle QBA$.

6. Натуральные числа x и y таковы, что $2x^2 - 1 = y^15$. Докажите, что если $x > 1$, то x делится на 5.

7. a, b — различные натуральные числа такие, что $ab(a+b)$ делится на $a^2 + ab + b^2$. Докажите, что $|a - b| > \sqrt[3]{ab}$.

8. В правильном $(6n+1)$-угольнике K вершин покрашены в красный цвет, а остальные в синий. Докажите, что количество равнобедренных треугольников с одноцветными вершинами не зависит от способа покраски.