Homework 2012. Masters

Problem 1. Знайдіть найбільше можливе натуральне число n для якого клітчасту дошку розміру $(n+1)\times(n-1)$ можна розфарбувати в три кольори (кожна клітинка фарбується в один із трьох кольорів) таким чином, щоб не існувало жодної четвірки однаково пофарбованих клітинок, котрі були б кутовими для прямокутника зі сторонами, паралельними лініям сітки.

Problem 2. Нехай $M=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$. Знайдіть усі функції $f: M\to M$ такі, що для довільних дійсних $x\neq 0, y\neq 0$, таких що $x^2+y\neq 0$ виконано

$$f(x^2+y)=(f(x))^2+\frac{f(xy)}{f(x)}.$$

Problem 3. В графе с $4k$ вершинами $3k$ ребер. Известно, что среди любых $2k$ его вершин найдутся две, соединенные ребром. Докажите, что вершины графа можно разбить на две группы по $2k$ вершин в каждой так, что никакие две вершины из разных групп не соединены ребром.

Problem 4. Доведіть, що для будь-якого натурального n многочлен

$$P(x)=(x^2+x)^{2^n}+1$$

не може бути подано у вигляді добутку двох многочленів (не тотожних констант) з цілими коефіцієнтами.

Problem 5. Дано групу з $n\geqslant 4$ людей, серед яких є знайомі (якщо А знайомий з В, то В знайомий з А). Кожні троє людей, що знайомі один з одним, мають для своєї трійки спільний сигнал (і ніяким іншим чином сигнали не отримуються). Всі ці сигнали є різними (якщо трійка знайомих відрізняється від іншої трійки знайомих хоча б одною людиною, то сигнали цих трійок різні). Загальна кількість сигналів рівна $m\geqslant 1$. Відомо, що у будь-якій четвірці людей, в якій деяка трійка має спільний сигнал, четверта людина має спільний сигнал не більше, ніж з однією особою з вказаної трійки.

Довести, що існує трійка людей зі спільним сигналом, така, що кількість осіб, що не мають спільних сигналів ні з ким з данної трійки є меншою або рівною

$$\left[n+3-\frac{18m}{n}\right].$$

Problem 6. Зясувати, чи існують цілі числа j,k,l,m,n, кожне з яких більше за 10^{100} такі, що

$$j^2+k^2+l^2+m^2+n^2=jklmn-12.$$

Problem 7. Найти все прямоугольники $a\times b$, которые можно разрезать на полоски (т.е. прямоугольники со сторонами, паралельными сторонам исходного прямоугольника), причем в каждой полоске одна из сторон равна 1.

Problem 8. Можно ли семиугольник (хотя бы какой-то) разрезать на выпуклые шестиугольники ?

Problem 9. Числа m,n натуральные. Докажите, что число

$$\frac{(5m)!(5n!)}{m!n!(3m+n)!(3n+m)!}$$

целое.

Problem 10. Найти все натуральные x, a, b такие, что $x^{a+b} = a^b b$.

Problem 11. Множество B целых чисел называется разностным базисом для множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ если для произвольного $d \in \{1, 2, \ldots, n\}$ существуют $b, b' \in B$ такие, что $d = b - b'$. Обозначим $k = k(n)$ наименьшее число элементов разностного базиса для $\{1, 2, \ldots, n\}$. Докажите, что

$$k^2 \geqslant (1 + \frac{2}{3\pi})(2n + 1).$$

Problem 12. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — натуральные числа, причем все суммы вида $a_{i_1} + \ldots + a_{i_k}$ $(i_1 < \ldots < i_k)$ различны, т.е. $\sum_{i \in I} a_i \neq \sum_{i \in J} a_i$ для $I \neq J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Докажите, что $\sum_{i=1}^{n} 1/a_i < 2$.

Problem 13. Пусть $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$ — положительные числа, O — точка внутри треугольника ABC. Пусть P — основание перпендикуляра из O на прямую BC, Q — основание перпендикуляра из O на прямую AC, R — основание перпендикуляра из O на AB. Докажите, что

$$\lambda_a OA + \lambda_b OB + \lambda_c OC \geqslant 2(\sqrt{\lambda_b \lambda_c} OP + \sqrt{\lambda_a \lambda_c} OQ + \sqrt{\lambda_a \lambda_b} OR).$$

Problem 14. Существует ли бесконечное слово из двух букв (например, 0,1), в котором нету блока, встречающегося три раза подряд ? (т.е. подслова вида www, где w — некоторая последовательность букв. Например, 010010010 — блок 010 встречается три раза подряд).

Problem 15. Пусть множество $S \subset \mathbb{N}$ состоит из $2^k + 1 \geqslant 3$ натуральных чисел. Рассмотрим все суммы $a + b$, $a, b \in S$, и для каждой такой суммы выпишем её простые делители. Докажите, что среди выписаных чисел не менее $k + 1$ различных.