Полюса и поляры

1) Касательная из вершины A треугольника ABC к его описанной окружности пересекает прямую ВС в точке A_1. Проведем через A_1 вторую касательную к описанной окружности треугольника ABC, пусть A_2 – новая точка касания. Аналогично строятся точки B_2 и C_2. Докажите, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке.

2) Вписанная окружность w треугольника ABC касается сторон BC, AC и AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно, I и I_A– инцентр и центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Средняя линия треугольника $A_1B_1C_1$ параллельная B_1C_1 пересекает w в точках D и E . Докажите, что четырехугольник $DIEI_A$ вписанный.

3) Окружности w_1 и w_2 касаются окружности w в точках C и D соответственно, и пересекаются в точках A и B. AM и AN - касательные из A к w. Оказалось, что точки A, C, D лежат на одной прямой. Докажите, что прямые AB, CM, DN пересекаются в одной точке.

4) Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, а лучи AD и BC - в точке F. Прямая EF пересекает дугу AD описанной вокруг четырехугольника окружности в точке M , а прямая проходящая через точку C и параллельная прямой AD пересекает окружность в точке N . Прямые MN и AD пересекаются в точке K , а прямые CM и AD - в точке L . Докажите, что четырехугольник $BCKL$ вписанный.

5) Вписанная окружность w треугольника ABC касается сторон BC, AC и AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Построим окружность, проходящую через точки B и C и касающуюся w в точке A_2 . Точки B_2, C_2 строятся аналогично. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 проходят через одну точку.

6) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O и описан вокруг окружности с центром I. Докажите, что I, O и точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ лежат на одной прямой.