Міністерство освіти і науки, молоді та спорту
Інститут інноваційних технологій та змісту освіти
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

LI Всеукраїнська олімпіада 2010–2011 років
Умови та розв'язки по усіх класах

Перший день

8 клас

1. (Рубльов Богдан) Знайдіть усі пари цілих чисел (x, y), що задовольняють рівність:

$$\Big|x + \big|x + |x|\big|\Big| \cdot \Big|\big||-y| - y\big| - y\Big| = 2011.$$

Відповідь: $x = -1, y = 2011$ та $x = -2011, y = 1$.

Розв'язання. Оскільки число 2011 – просте, то кожний з множників у лівій частині рівняння повинен дорівнювати або 1, або 2011.

При $x \geq 0$ перший множник дорівнює $3x$, тому розв'язків немає. Аналогічно, при $y \leq 0$ другий множник дорівнює $-3y$, і також розв'язків немає.

Нехай тепер $x < 0$ та $y > 0$, тоді:

$$\Big|x + \big|x + |x|\big|\Big| \cdot \Big|\big||-y| - y\big| - y\Big| = \big|x + |x - x|\big| \cdot \big||y - y| - y\big| = |x| \cdot |-y| = -xy = 2011.$$

Вже звідси з простоти числа 2011 знаходимо наведені відповіді.

2. (Рожкова Марія) У трикутнику ABC кут A вдвічі більший від кута B, CD – бісектриса кута C. Доведіть, що $BC = AC + AD$.

Розв'язання. Побудуємо пряму AE, яка перпендикулярна до прямої CD (точка E належить стороні BC). Тоді $\triangle ACE$ рівнобедрений (бісектриса кута C є водночас висотою трикутника) (рис.1). Тому $AC = CE$. $\triangle ADE$ рівнобедрений, бо пряма CD перпендикулярна до AE і ділить сторону AE навпіл (висота є медіаною). Маємо:

$$AD = DE. \qquad (1)$$

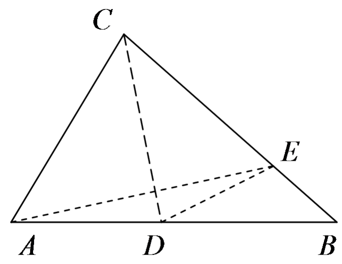

Рис. 1

Нехай $\angle B = \alpha$, $\angle A = 2\alpha$, $\angle C = 180° - 3\alpha$. Тоді маємо, що $\angle ADC = \alpha + 90° - \frac{3\alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Тоді $\angle ADE = 180° - \alpha$, отже $\angle EDB = \alpha = \angle B$, тому $\triangle DEB$ рівнобедрений, звідки

$$BE = DE. \qquad (2)$$

З (1) і (2) випливає, що $AD = BE$. Остаточно маємо, що $BC = CE + BE = AC + AD$.

3. (Сенін Віталій) Для попарно різних натуральних чисел a, b, c, d число $ab + cd$ ділиться націло на число $ac + bd$. Доведіть, що число $ac + bd$ складене.

Розв'язання. Методом від супротивного. Припустимо, що число $(ac + bd)$ – просте. Тоді $(ac + bd) \,|\, (ab + cd) \Rightarrow (ac + bd) \,|\, (ac + bd + ab + cd) = (a + d)(b + c)$, тому $(ac + bd) \,|\, (a + d)$ або $(ac + bd) \,|\, (b + c)$. Але при різних числах a, b, c, d це неможливо, оскільки $(ac + bd) > (a + d)$ та $(ac + bd) > (b + c)$. Одержана суперечність завершує доведення.

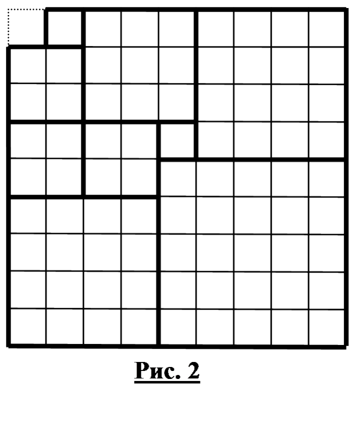
Рис. 2

4. (Чорний Максим) З квадрата розміром 2011×2011 вирізали одну кутову клітинку. Чи можна фігуру, що утворилась, розрізати вздовж ліній сітки на квадрати, кількість яких не перевищує 120?

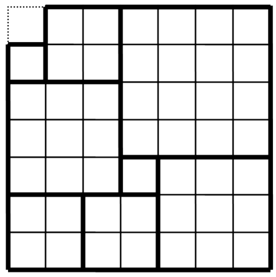

Рис. 3

Відповідь: так.

Розв'язання. Будемо позначати $a \to x$, якщо квадрат $a \times a$, з якого вирізано одну кутову клітинку, можна розрізати на x квадратів уздовж ліній сітки.
Очевидно, що $2 \to 3$. Також помітимо, що $7 \to 8$ та $9 \to 9$ (рис.2 та 3):

Покажемо, що якщо $a \to x$ та $b \to y$, то $ab \to x + y$. Дійсно, квадрат зі стороною ab і вирізаною клітинкою можна розрізати на квадрат зі стороною b і вирізаною клітинкою, який розбивається на y квадратів, та квадрат зі стороною ab, від кута якого відрізано квадрат зі стороною b.

Його можна розбити на x квадратів, адже це той самий квадрат зі стороною a і вирізаною клітинкою, але збільшений в b разів за стороною. Отже, квадрат зі стороною ab без клітинки розбивається на $x + y$ квадратів. Звідси ж випливає, що якщо

$$a \to x \qquad \Rightarrow \qquad 2a \to x + 3. \qquad (*)$$

Покажемо, що якщо

$$a \to x \qquad \Rightarrow \qquad 2a - 1 \to 2x + 2. \qquad (**)$$

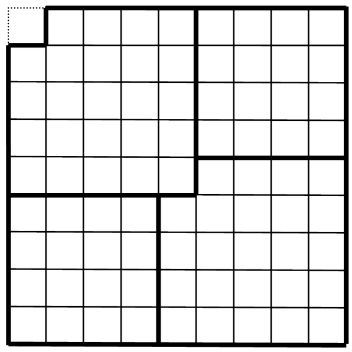

Рис. 4

Дійсно, "неповний" квадрат розбивається на 2 квадрати зі стороною $a-1$ та 2 "неповні" квадрати зі стороною a (рис.4).

А тому: $7 \to 8$, $9 \to 9$, $63 \to 17$, $126 \to 20$, $252 \to 23$, $503 \to 48$, $1006 \to 51$, $2011 \to 104$. Таким чином, користуючись (*) та (**), ми показали, що початкова фігура розбивається на $104 < 120$ квадратів.

9 клас

1. (Рубльов Богдан) Розв'язати рівняння:

$$\big[|x|\big] = \big|[x]\big|,$$

де $[a]$ – це ціла частина числа a, тобто найбільше ціле число, що не перевищує a.

Відповідь: Усі невід'ємні та цілі від'ємні числа.

Розв'язання. Розглянемо 3 випадки.

1) $x \geq 0$, тоді $|x| = x$, $[x] \geq 0$, і тому $\big|[x]\big| = [x] = \big[|x|\big]$, тобто кожне невід'ємне x є розв'язком рівняння.

2) x – ціле від'ємне, тоді $[x] = x$, $[-x] = -x$, $|x| = -x$, і знову виконується рівність $\big[|x|\big] = [-x] = -x = |x| = \big|[x]\big|$, тобто і ці значення є коренями рівняння.

3) x – від'ємне, але не ціле, тоді $|x| = -x$, $\big[|x|\big] < -x$. З іншого боку, $[x] < x < 0$, $\big|[x]\big| > -x$, тобто рівність не задовольняється.

2. (Рубльов Богдан) У опуклому 100-кутнику відмітили усі його вершини, а також декілька точок усередині цього багатокутника. Жодні три з відмічених точок не лежать на одній прямій. Відмічені точки з'єднали між собою таким чином, що багатокутник виявився повністю розбитим на 2011 опуклих багатокутників. Доведіть, що принаймні один із цих багатокутників має парну кількість сторін.

Розв'язання. Обчислимо число N, яке складається з суми усіх чисел e_j, де послідовно додаються усі сторони кожного багатокутника. Тоді це число є парним, оскільки воно складається з числа 100, а також подвоєної кількості усіх відрізків, які були проведені всередині заданого 100-кутника, оскільки кожний такий відрізок рахується двічі. Але усього доданків e_j рівно 2011 (непарна кількість), а тому якщо кожний з них непарний, то й сума буде непарною, що суперечить парності числа N. Тому припущення про непарність усіх доданків хибне, що й завершує доведення.

3. (Петровський Дмитро) Для невід'ємних чисел a, b, c, таких що $a+b+c=1$, доведіть нерівність:

$$\sqrt{1-a}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-c} \leq \sqrt{2}\left(\sqrt{ab+bc+ca}+2\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right).$$

Розв'язання. З нерівності Коші–Буняковського для наборів $(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}, \sqrt{\gamma})$ та $(\sqrt{\alpha x}, \sqrt{\beta y}, \sqrt{\gamma z})$ маємо:

$$(\alpha\sqrt{x}+\beta\sqrt{y}+\gamma\sqrt{z}) \leq \sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha x+\beta y+\gamma z)},$$

тому

$$a\sqrt{a+b}+b\sqrt{b+c}+c\sqrt{c+a} \leq$$
$$\leq \sqrt{(a+b+c)(a^2+ab+b^2+bc+c^2+ca)} \leq \sqrt{2(a^2+b^2+c^2)},$$

аналогічно,

$$b\sqrt{a+b}+c\sqrt{b+c}+a\sqrt{c+a} \leq \sqrt{2(a^2+b^2+c^2)},$$

і нарешті,

$$c\sqrt{a+b}+a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a} \leq \sqrt{2(ab+bc+ca)}.$$

Залишається додати усі одержані нерівності.

4. (Ясінський В'ячеслав) На сторонах XY, YZ та ZX трикутника XYZ позначили відповідно точки C, E та A. На відрізках AX, CY та EZ відповідно відмітили точки B, D та F таким чином, що $BC \parallel AD$, $DE \parallel CF$, $AF \parallel BE$. Чи може статися так, що прямі XF, YB і ZD перетнуться в одній точці?

Відповідь: Ні, не може.

Розв'язання. Припустимо, що це можливо (рис.5). Нехай O – точка перетину прямих XF, YB і ZD, тоді за теоремою Чеви:

$$\frac{YD}{DX}\cdot\frac{XB}{BZ}\cdot\frac{ZF}{FY}=1.$$

З іншого боку, використовуючи узагальнену теорему Фалеса, одержуємо:

$$\frac{YD}{DX}=\frac{YD}{CD}\cdot\frac{CD}{DX}=\frac{YE}{EF}\cdot\frac{CD}{DX},$$

$$\frac{XB}{BZ}=\frac{XB}{AB}\cdot\frac{AB}{BZ}=\frac{XC}{CD}\cdot\frac{AB}{BZ},$$

$$\frac{ZF}{FY}=\frac{ZF}{FE}\cdot\frac{FE}{FY}=\frac{ZA}{AB}\cdot\frac{FE}{FY}.$$

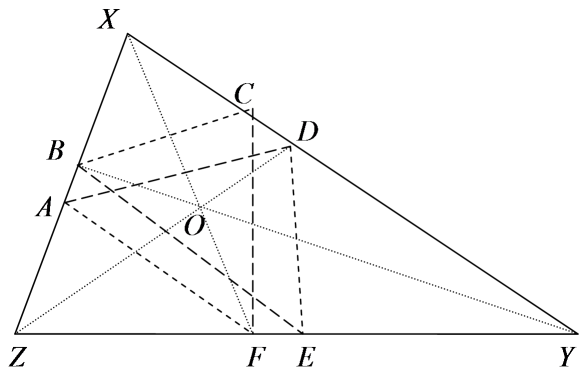

Рис. 5

Таким чином,

$$1=\frac{YD}{DX}\cdot\frac{XB}{BZ}\cdot\frac{ZF}{FY}=\left(\frac{YE}{EF}\cdot\frac{CD}{DX}\right)\cdot\left(\frac{XC}{CD}\cdot\frac{AB}{BZ}\right)\cdot\left(\frac{ZA}{AB}\cdot\frac{FE}{FY}\right)=\frac{YE}{YF}\cdot\frac{XC}{XD}\cdot\frac{ZA}{ZB}<1,$$

бо кожний із дробів $\frac{YE}{YF}$, $\frac{XC}{XD}$ і $\frac{ZA}{ZB}$ менший за 1. Одержане протиріччя і доводить, що прямі XF, YB і ZD не перетинаються.

10 клас

1. $\boxed{\textbf{Лейфура Валентин}}$ Дійсні числа x, y задовольняють умову:

$$x^2 + 3xy + 4y^2 \leq \frac{7}{2}.$$

Доведіть, що $x + y \leq 2$.

Розв'язання. Позначимо через $t = x + y$, підставимо у задану нерівність $x = t - y$, тоді ця нерівність набуває такого вигляду: $(t - y)^2 + 3(t - y)y + 4y^2 - \frac{7}{2} \leq 0$ або

$$2y^2 + ty + t^2 - \frac{7}{2} \leq 0.$$

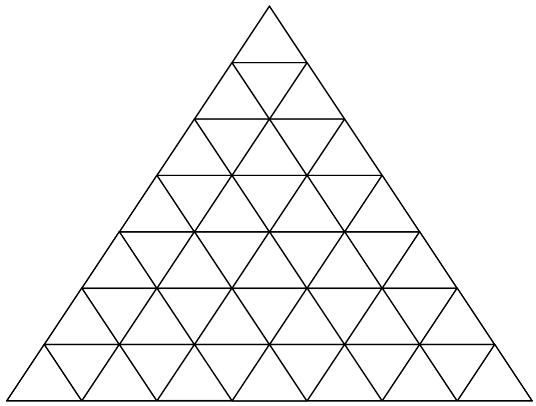

Рис. 6

Оскільки ця квадратна нерівність повинна приймати недодатні значення, то дискримінант відповідного квадратного тричлена повинен бути невід'ємним, тобто

$$D = 28 - 7t^2 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad t^2 \leq 4.$$

Таким чином, найбільше можливе значення для t – це 2, таким чином $t = x + y \leq 2$, що й треба було довести.

2. (Ясінський В'ячеслав) Правильний трикутник зі стороною 7 поділено на 49 маленьких правильних одиничних трикутничків так, як показано на рис.6. Із нього вирізають уздовж ліній сітки паралелограми, одна сторона яких дорівнює 1, а друга дорівнює 2.
Яку найбільшу кількість таких паралелограмів можна вирізати?

Відповідь: 10.

Розв'язання. Розфарбуємо даний трикутник у "шаховому" порядку так, як це зроблено на рис.7.

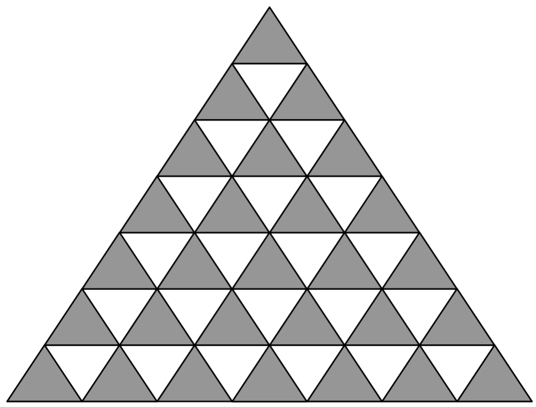

Рис. 7

Оскільки кожний вирізаний паралелограм складається із двох білих одиничних трикутничків, а їх всього 21 на даному трикутнику, то число усіх вирізаних паралелограмів не перевищує 10.

Якщо їх буде вирізано 11 або більше, то всього буде вирізано $2 \cdot 11 = 22$ білих одиничних трикутнички або більше, чого не може бути, бо їх всього 21. Як саме можна вирізати рівно 10 потрібних паралелограмів, показано на рис. 8.

Рис. 8

3. (Сенін Віталій) Для натурального числа $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_n^{a_n}$, поданого у вигляді канонічного розкладу (p_i – прості та попарно різні, a_i – натуральні, $1 \leq i \leq n$), уведемо позначення $T(N) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Для деяких попарно різних натуральних чисел a, b, c, d число $ab + cd$ ділиться націло на число $ac + bd$. Доведіть, що $T(ab + cd) \geq 3$.

Розв'язання. Від супротивного, припустимо, що $T(ab + cd) \leq 2$.

Лема. Відомо, що $(ac+bd)|(ab+cd)$ для попарно різних натуральних a,b,c,d. Тоді число $(ac+bd)$ – складене.

Доведення леми. Нехай $ac+bd$ – просте. Тоді $(ac+bd)|(ab+cd) \Rightarrow (ac+bd)|(ab+cd)+(ac+bd)=(a+d)(b+c) \Rightarrow (ac+bd)|(a+d)$ або $(ac+bd)|(b+c)$, але зрозуміло, що тут дільник більший від кожного із наведених кратних, тому це неможливо.

Лема доведена.

Таким чином, доведено, що $T(ac+bd) \geq 2$. Оскільки $(ac+bd)|(ab+cd)$, то $T(ab+cd) \geq T(ac+bd) \geq 2$, тобто $T(ab+cd)=T(ac+bd)=2$, але тоді ці числа повинні збігатися, бо вони можуть мати вигляд або квадрата простого числа, або добутку двох простих чисел. Таким чином, $(ac+bd)=(ab+cd) \Rightarrow (a-d)(b-c)=0$, що суперечить тому, що усі числа є попарно різними.

Одержана суперечність завершує доведення.

4. (Безверхнєв Ярослав) Через точку F, що розташована поза колом k, провели до цього кола дотичну FA та січну FB, яка перетинає k в точках B і C (C лежить між F і B). Через точку C провели дотичну до кола k, яка перетнула відрізок FA в точці E. Відрізок FX – бісектриса трикутника AFC. Виявилось, що точки E, X та B лежать на одній прямій. Доведіть, що добуток довжин двох сторін трикутника ABC дорівнює квадрату довжини третьої сторони.

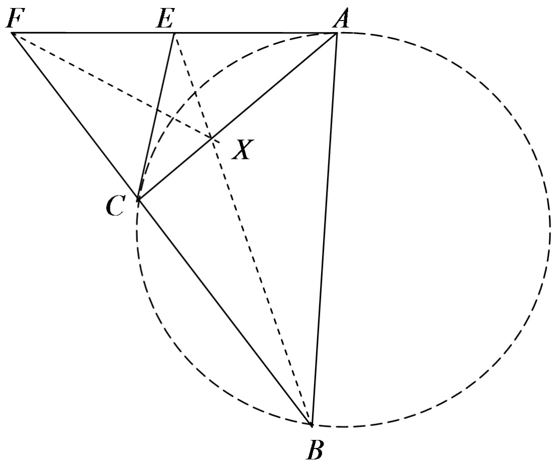

Рис. 9

Розв'язання. Нижче доведемо, що відрізок BX – це симедіана $\triangle ABC$, за відомою властивістю симедіани, яка також буде доведена нижче, $\frac{CX}{AX}=\frac{CB^2}{AB^2}$, з властивості бісектриси FX маємо, що $\frac{CX}{AX}=\frac{FC}{FA}$ (рис.9).

Оскільки $\triangle AFC \sim \triangle BFA$ за рівними кутами $\angle CAF=\angle FBA$ та спільним кутом $\angle CFA$, тому $\frac{FC}{AF}=\frac{AC}{AB}$. Тепер використаємо усі ці одержані рівності.

$$\frac{AC}{AB}=\frac{FC}{AF}=\frac{CX}{AX}=\frac{CB^2}{AB^2},$$

звідки й маємо шукане співвідношення:

$$AB \cdot AC = CB^2.$$

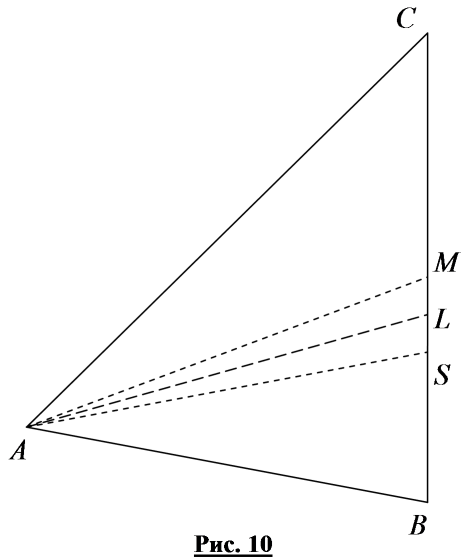

Рис. 10

Симедіана – чевіана у трикутнику, відмінна від медіани, така що кут між симедіаною та бісектрисою рівний куту між бісектрисою та медіаною, що проведені з тієї ж вершини.

Доведемо наведені твердження про симедіану.

1) Нехай, як на рис.10, $AS=s$ – симедіана, $AL=l$ – бісектриса, $AM=m$ – медіана $\triangle ABC$, тоді $\angle MAL=\angle LAS$.

Розглянемо відношення площ трикутників ASC та AMB:

$$\frac{S_{AMB}}{S_{ASC}}=\frac{\frac{1}{2}mc\sin\angle BAM}{\frac{1}{2}sb\sin\angle SAC}=\frac{cm}{bs},$$

оскільки кути $\angle BAM$ та $\angle SAC$ рівні (рис.10).

Розглянемо аналогічно площі $\triangle ASB$ та $\triangle AMC$ і одержимо, що:

$$\frac{S_{AMC}}{S_{ABS}} = \frac{bm}{cs}.$$

Оскільки $S_{AMB} = S_{AMC}$, бо AM – медіана, розділимо два одержаних відношення і будемо мати, що

$$\frac{S_{ABS}}{S_{ASC}} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{BS}{SC},$$

що й треба було довести.

2) Якщо до кола проведені із зовнішньої точки F дві дотичні FA та FC (рис.11), по інший бік від прямої AC відносно точки F на колі вибрана точка B, тоді на прямій BF лежить симедіана $\triangle ABC$.

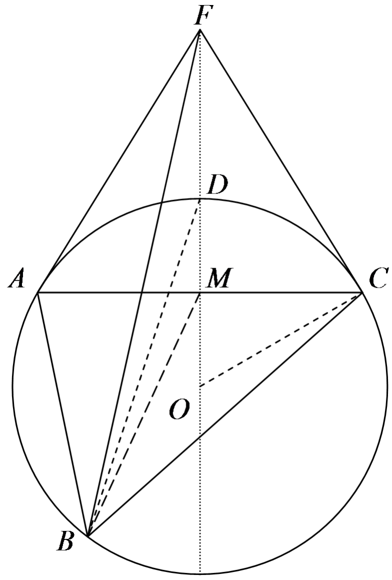

Рис. 11

З'єднаємо центр кола O та точку дотику C, тоді з прямокутного $\triangle FOC$ маємо рівність $OM \cdot OF = OC^2 = R^2 = OB^2$. Звідси маємо рівність:

$$\frac{OM}{OB} = \frac{OB}{OF}.$$

Тепер розглянемо трикутники BOM та FOB. Вони мають спільний кут та прилеглі пропорційні сторони, тому $\triangle BOM \sim \triangle BOF$. Позначимо

$$k = \frac{OM}{OB} = \frac{OB}{OF} = \frac{BM}{BF},$$

тоді $OB = kOF$, $OM = kOB = k^2OF$, звідки (рис.11)

$$\frac{DM}{DF} = \frac{BO - OM}{OF - OB} = \frac{kOF - k^2OF}{OF - kOF} = k = \frac{BM}{BF},$$

що й доводить з властивості бісектриси, що BD – бісектриса $\angle FBM$. Тому кут між BF та бісектрисою BD рівний куту між бісектрисою BD та медіаною BM, що й визначає симедіану.

Альтернативне розв'язання. Розглянемо трикутнник ACF. Точки E, X, B лежать на одній прямій, тому за теоремою Менелая

$$\frac{AE}{EF} \cdot \frac{FB}{BC} \cdot \frac{CX}{XA} = 1. \qquad (1)$$

Оскільки FX – бісектриса кута AFC, то $\frac{CX}{XA} = \frac{CF}{FA}$. $EA = EC$, як дотичні, проведені до кола з однієї точки, а $BF = \frac{AF^2}{FC}$ з теореми про квадрат дотичної, тому (1) можемо переписати у вигляді

$$\frac{EC}{EF} \cdot \frac{AF}{BC} = 1. \qquad (2)$$

Оскільки $\angle ECA = \angle CBA$, то $\angle FCE = \pi - \angle ECA - \angle ACB = \pi - \angle CBA - \angle ACB = \angle CAB$, і за теоремою синусів для трикутника CEF отримуємо

$$\frac{EC}{\sin\angle AFB} = \frac{EF}{\sin\angle FCE} = \frac{EF}{\sin\angle CAB}, \qquad (3)$$

з іншого боку, за теоремою синусів для трикутника AFB

$$\frac{AF}{\sin\angle FBA} = \frac{AB}{\sin\angle AFB}. \qquad (4)$$

Використаємо (2), (3) і (4) разом, і, скориставшись теоремою синусів для трикутника ABC, отримуємо, що
$$\frac{AB}{BC}=\frac{EF\sin\angle AFB}{EC\sin\angle FBA}=\frac{\sin\angle CAB}{\sin\angle CBA}=\frac{BC}{AC},$$
звідки випливає, що сторони трикутника ABC утворюють геометричну прогресію.

11 клас

1. (Ясінський В'ячеслав) Розв'язати рівняння:

$$\cos\pi x=\left[\frac{x}{2}-\left[\frac{x}{2}\right]-\frac{1}{2}\right].$$

Тут через $[a]$ позначено цілу частину числа a, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує a.

Відповідь: $x=\frac{3}{2}+2n$, де $n\in\mathbb{Z}$.

Розв'язання. Скористаємося формулою для дробової частини числа: $\{a\}=a-[a]$. Дістанемо:
$$\cos\pi x=\left[\left\{\frac{x}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right].$$

Оскільки, за основною властивістю дробової частини, для будь-якого дійсного x виконується подвійна нерівність $0\le\left\{\frac{x}{2}\right\}<1$, то розглянемо такі два випадки.

1) Нехай $0\le\left\{\frac{x}{2}\right\}<\frac{1}{2}$, тоді $-\frac{1}{2}\le\left\{\frac{x}{2}\right\}-\frac{1}{2}<0$, тобто $\left[\left\{\frac{x}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right]=-1$. Тому у цьому випадку $\cos\pi x=-1$. Звідки знаходимо, що $x=1+2k$, $k\in\mathbb{Z}$. При таких значеннях x маємо: $\left\{\frac{x}{2}\right\}=\left\{\frac{1}{2}+k\right\}=\frac{1}{2}$, що суперечить припущенню. Отже, в цьому випадку дане рівняння розв'язків немає.

2) Нехай $\frac{1}{2}\le\left\{\frac{x}{2}\right\}<1$, тоді $0\le\left\{\frac{x}{2}\right\}-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$, тобто $\left[\left\{\frac{x}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right]=0$. Тому у цьому випадку $\cos\pi x=0$. Звідки знаходимо, що $x=\frac{1}{2}+k$, $k\in\mathbb{Z}$. При таких значеннях x маємо:

$$\left\{\frac{x}{2}\right\}=\left\{\frac{1}{4}+\frac{k}{2}\right\}=\begin{cases}\frac{1}{4}, k=2n,\\ \frac{3}{4}, k=2n+1.\end{cases}$$

Для випадку, що розглядається, підходить $k=1+2n$, де $n\in\mathbb{Z}$. Тому, $x=\frac{3}{2}+2n$, де $n\in\mathbb{Z}$, – це усі розв'язки даного рівняння.

2. (Задача № 2 за 10-й клас)

3. (Веклич Богдан) Натуральні числа a,b,c,d задовольняють умову:

$$0<|ad-bc|<\min\{c,d\}.$$

x,y – взаємно прості натуральні числа, більші від 1. Доведіть, що число x^a+y^b не ділиться на число x^c+y^d.

Розв'язання. Доведемо методом від супротивного, позначимо через s суму x^c+y^d. Припустимо, що $(x^a+y^b)\,\vdots\,s$, тоді $x^a\equiv -y^b\pmod s$, крім того, за побудовою $x^c\equiv -y^d\pmod s$. Звідси випливає, що $x^{ad}\equiv(-1)^d y^{bd}\pmod s$ та $x^{bc}\equiv(-1)^b y^{bd}\pmod s$, тому $(-1)^d x^{ad}\equiv y^{bd}\equiv(-1)^b x^{bc}\pmod s\Rightarrow x^{ad}\equiv(-1)^{b-d}x^{bc}\pmod s$. Очевидно, що x взаємно просте з s, тому скоротимо останню конгруенцію на x в степені $\min\{ad,bc\}$ і одержимо, що $x^{|ad-bc|}\equiv(-1)^{b-d}\pmod s$. Повністю аналогічно одержимо, що $y^{|ad-bc|}\equiv(-1)^{a-c}\pmod s$. Тому $y^{|ad-bc|}-x^{|ad-bc|}\,\vdots\,s$ або $y^{|ad-bc|}+x^{|ad-bc|}\,\vdots\,s$.

З умов задачі ми маємо, що $0<|ad-bc|<\min\{c,d\}$. Але тоді ми маємо, що

$$\left|y^{|ad-bc|}-x^{|ad-bc|}\right|<y^{|ad-bc|}+x^{|ad-bc|}<y^d+x^c=s.$$

Але тоді сума чи різниця $\left|y^{|ad-bc|} \pm x^{|ad-bc|}\right|$ може ділитись на s лише у випадку, якщо це різниця і вона дорівнює нулю. Але це суперечить умові взаємної простоти x та y.

Твердження доведене.

4. (Ясінський В'ячеслав) Дано трапецію $ABCD$ з основами AD і BC. На бічній стороні CD довільно відмітили точку F, E – точка перетину прямих AF і BD. На бічній стороні AB відмітили точку G так, що $EG \parallel AD$. Позначимо через H точку перетину прямих CG і BD, через I – точку перетину прямих FH і AB. Доведіть, що прямі CI, FG і AD перетинаються в одній точці.

Розв'язання. Не порушуючи загальності, будемо вважати, що $BC < AD$. Нехай S – точка перетину прямих AB і CD, а T – точка перетину прямих AF і DG. Спочатку доведемо, що точки S, H, T – колінеарні. Для цього застосуємо теорему Менелая для трикутника ABE і трьох точок S, H, T, які лежать на прямих, що містять його сторони: точки S, H, T, будуть колінеарними тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{AT}{TE} \cdot \frac{EH}{HB} \cdot \frac{BS}{SA} = 1.$$

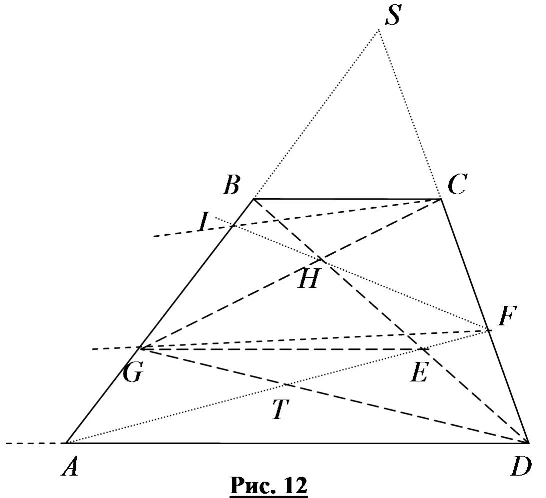

Рис. 12

Оскільки $EG \parallel AD$, $GE \parallel BC$ та $AD \parallel BC$,

то $\triangle ATD \sim \triangle ETG$, $\triangle GHE \sim \triangle CHB$ та $\triangle ASD \sim \triangle BSC$. Звідки випливає, що

$$\frac{AT}{TE} = \frac{AD}{GE}, \qquad \frac{EH}{BH} = \frac{GE}{BC}, \qquad \frac{BS}{SA} = \frac{BC}{AD}.$$

Отже,

$$\frac{AT}{TE} \cdot \frac{EH}{HB} \cdot \frac{BS}{SA} = \frac{AD}{GE} \cdot \frac{GE}{BC} \cdot \frac{BC}{AD} = 1,$$

що і доводить колінеарність точок S, H, T.

Далі, розглянемо два трикутники AFI і DGC. Їхні відповідні сторони перетинаються в точках $IF \cap CG = H$, $FA \cap GD = T$, $AI \cap CD = S$, які колінеарні. Тому, за теоремою Дезарга, прямі CI, FG і AD, що проходять через відповідні вершини цих трикутників, перетинаються в одній точці.

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

LI Всеукраїнська олімпіада 2010–2011 років
Умови та розв'язки по усіх класах

Другий день

8 клас

5. (Рубльов Богдан) Розв'яжіть нерівність:

$$\max\{|x|-1, x^2-1\} \le \min\{x^2-1, 1-|x|\},$$

де $\max\{a,b\} = \begin{cases} a, & a \ge b, \\ b, & a < b, \end{cases}$ та $\min\{a,b\} = \begin{cases} b, & a \ge b, \\ a, & a < b. \end{cases}$

Відповідь: $x=0$, $x=1$ та $x=-1$.

Розв'язання. Зрозуміло, що:

$$\max\{|x|-1, x^2-1\} \ge x^2-1 \ge \min\{x^2-1, 1-|x|\},$$

тому виконання умов задачі можливе, лише якщо виконуються рівності:

$$\max\{|x|-1, x^2-1\} = x^2-1 = \min\{x^2-1, 1-|x|\},$$

а це своєю чергою має місце за таких умов:

$$|x|-1 \le x^2-1 \le 1-|x|.$$

Таким чином, $1-|x| \ge |x|-1$, звідки $|x| \le 1$.
При таких, значеннях x повинна також виконуватись нерівність: $|x| \le |x|^2 = |x| \cdot |x|$, а, з урахуванням умови $|x| \le 1$, це можливе лише при $|x|=1$ або $|x|=0$, тобто $x=1$, $x=0$ та $x=-1$.
Перевіркою переконуємось, що вони задовольняють умови задачі.
Також неважко розв'язати цю задачу графічним методом (рис.13). Тут пунктиром зображена функція з лівої частини рівності, а пунктиром з крапками зображена функція з правої частини рівності. Вони перетинаються саме при наведених значеннях x.

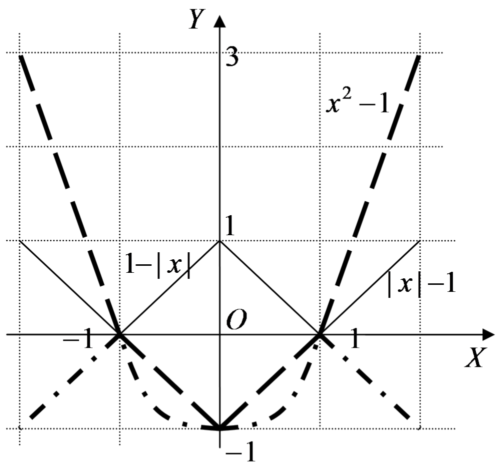

Рис. 13

6. (Рубльов Богдан) Назвемо натуральне число близнюком, якщо воно має два натуральних дільники, різниця між якими дорівнює 2. З'ясуйте, яких чисел більше серед перших 20112012 натуральних чисел: близнюків чи тих, що не є близнюками.

Відповідь: близнюків більше.

Розв'язання. Для зручності позначимо число 20112012 через M, через M_K будемо позначати множину чисел, які не перевищують M та кратні числу K, а через N_K – кількість елементів множини M_K, тобто $N_K = |M_K|$. Добре відомо, що $N_K = \left[\frac{M}{K}\right]$.

Позначимо кількість близнюків із множини перших M натуральних чисел через N, тоді $N > N_3 + N_4 - N_{12}$, тому що усі числа з множин M_3 та M_4 є близнюками, бо мають відповідно дільники 1 і 3 та 2 і 4. У множину M_{12} входять спільні числа з цих множин, тобто ті, які в сумі $N_3 + N_4$ підраховані двічі. Але є ще багато не врахованих близнюків, наприклад число $35 = 5 \cdot 7$ або $143 = 11 \cdot 13$ та багато інших. Оскільки M кратне 12, то

$$N > \frac{M}{3} + \frac{M}{4} - \frac{M}{12} = \frac{M}{2},$$

звідки й випливає, що у даному випадку чисел-близнюків більше за половину від усієї кількості чисел.

7. (Майзліш О., Наумов М.) На прямій розташовано $n \geq 3$ нірок. В одній із цих нірок ховається мишеня Джеррі. У кота Тома є можливість засунути лапу у будь-яку нірку та піймати Джеррі, якщо він ховається у цій нірці. Мишеня після кожної спроби Тома обов'язково перебігає у сусідню справа чи зліва нірку. Чи може Том гарантовано спіймати Джеррі?

Відповідь: так, може.

Розв'язання. Означимо "відстань" між нірками i та j як $i-j$ (вона може бути і від'ємною).

Спочатку Том послідовно проходить усі нірки від першої до останньої. Якщо у початковий момент, коли Том засовує лапу у першу нірку, мишеня у нірці з непарним номером, то він гарантовано при такому проході упіймає Джеррі.

Дійсно, у перший момент, коли Том залазить у першу нірку, і якщо він відразу його там не упіймав, відстань між ними дорівнює парному додатному числу. Якщо він дійде до останньої нірки і там не піймає мишеня, то відстань між мишеням та Томом дорівнюватиме парному від'ємному числу. Оскільки при кожному перебіганні Джеррі та пересуванні Тома відстань між Джеррі та Томом або не змінюється (якщо вони рухаються в одному напрямі), або змінюється на 2 (рухаються у різних напрямах), то гарантовано буде момент, коли відстань між ними дорівнюватиме нулеві. Перескочити з додатних парних до від'ємних парних шляхом додавання та віднімання числа 2, оминаючи нуль, неможливо.

Якщо кіт та мишеня спочатку у нірках різних парностей, то по досягненні останньої нірки Том у нірці n, а мишеня у нірці іншої парності. Тепер Том знову ходить у нірку n, а мишеня переходить у нірку однакової парності з числом n. Після цього кіт рухається у зворотному напрямі, послідовно проходячи усі нірки від n до 1. Тепер у них парності збігаються, а тому, з вищеописаних міркувань, в деякий момент часу відстань між ними буде нульовою.

8. (Чорний Максим) У паралелограмі $ABCD$ $\angle ABC = 105°$. Відомо, що всередині цього паралелограма існує така точка M, що трикутник BMC рівносторонній та $\angle CMD = 135°$. Нехай точка K – середина сторони AB. Знайдіть градусну міру кута BKC.

Відповідь: $\angle BKC = 45°$.

Розв'язання. Опустимо перпендикуляр CL на пряму DM. Тоді в $\triangle MCL$ відомі $\angle MLC = 90°$, $\angle LMC = 45°$, тому $\angle LCM = 45°$ і $CL = \frac{1}{\sqrt{2}}CM$. Оскільки $\angle LCD = 60°$, то з прямокутного $\triangle LCD$ знаходимо, що $CD = 2CL = \sqrt{2}CM$.
$AB = CD = \sqrt{2}CM = \sqrt{2}BM$, оскільки $\angle ABM = 45°$, то з $\triangle ABM$ знаходимо $\angle BMA = 90°$. KM – медіана прямого кута $\triangle ABM$, тому $KM = BK = AK$. Таким чином, чотирикутник $KBCM$ – дельтоїд, його діагоналі перпендикулярні і перетинаються в точці O. Тому в $\triangle BOK$ кути $\angle BOK = 90°$ і $\angle OBK = 45°$, тому $\angle BKO = 45°$.

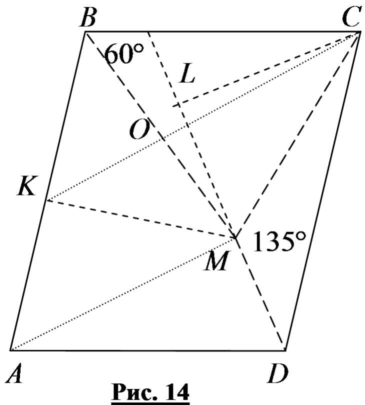

Рис. 14

9 клас

5. (Рубльов Богдан) Розв'яжіть нерівність:

$$\max\{x^2+3x+3, x^{2011}+x^4+x^2+x+1\} \leq \min\{1-x-x^2, x^{2011}+x^4+x^2+x+1\},$$

де $\max\{a,b\} = \begin{cases} a, & a \geq b, \\ b, & a < b, \end{cases}$ та $\min\{a,b\} = \begin{cases} b, & a \geq b, \\ a, & a < b. \end{cases}$

Відповідь: $x = -1$.

Розв'язання. Позначимо для зручності $P(x) = x^{2011} + x^4 + x^2 + x + 1$. Зрозуміло, що:

$$\max\{x^2 + 3x + 3, P(x)\} \geq P(x) \geq \min\{1 - x - x^2, P(x)\},$$

тому виконання умов задачі можливе, лише якщо виконуються рівності:

$$\max\{x^2 + 3x + 3, P(x)\} = P(x) = \min\{1 - x - x^2, P(x)\},$$

а це своєю чергою має місце за таких умов:

$$x^2 + 3x + 3 \leq P(x) \leq 1 - x - x^2.$$

Таким чином, $x^2+3x+3 \leq 1-x-x^2$, звідки $2x^2+4x+2 \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = -1$. Таким чином, єдиним можливим розв'язком може бути $x = -1$. Перевіркою переконуємось, що це значення задовольняє умову.

6. (Веклич Богдан) У трикутнику ABC точка M – середина сторони BC, на стороні AB відмітили точку N так, що $NB = 2AN$. Виявилось, що $\angle CAB = \angle CMN$. Чому дорівнює відношення $\frac{AC}{BC}$?

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

Розв'язання. Відкладемо на промені CA точку D таким чином, щоб $CA = AD$ (рис.15). Тоді для $\triangle BCD$ відрізки DM та BA є медіанами, тому в точці перетину T вони діляться у відношенні $2:1$, якщо рахувати від вершини. Звідси випливає, що точки T та N збігаються. Тоді $\angle DAB = \pi - \angle CAB = \pi - \angle CMN = \angle DMB$, тому чотирикутник $BMAD$ – вписаний. Оскільки $AM \parallel BD$, як середня лінія трикутника, то $\angle CDB = \angle CAM = \angle CBD$, звідки випливає, що $CD = CB$, тому $\frac{AC}{BC} = \frac{\frac{1}{2}DC}{DC} = \frac{1}{2}$.
Неважко переконатись, що умова задачі справджується для будь-якого трикутника з таким відношенням сторін.

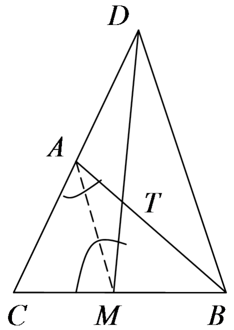

Рис. 15

7. (Рубльов Богдан) Яка найменша кількість кольорів потрібна для того, щоб зафарбувати клітчасту дошку розміром 2011×2011 таким чином, щоб кожні три клітинки на дошці, які утворюють одну з фігурок триміно (пряме триміно або кутове триміно) у будь якій орієнтації, були пофарбовані у різний колір? Кожен одиничний квадратик фарбується повністю в один колір.

Відповідь: 5 кольорів.

Розв'язання. Спочатку покажемо, що 5 кольорів достатньо. На рис.16, показано, як ми фарбуємо дошку. Виділений квадрат 5×5, який пофарбовано відповідним чином, а далі цей квадрат просто повторюється потрібну кількість разів. Легко зрозуміти, що наведене розфарбування задовольняє умови.

3	4	5	1	2	3	4
5	1	2	3	4	5	1
2	3	4	5	1	2	3
4	5	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	1	2
3	4	5	1	2	3	4
5	1	2	3	4	5	1

Рис. 16

Тепер покажемо, що меншої кількості не вистачить. Припустимо, що вистачить менше ніж 5 кольорів. У будь-якому квадраті 2×2 усі клітини повинні бути пофарбовані у різні кольори (рис.17), тепер подивимось, у який колір можна пофарбувати клітини з зірочкою та двома зірочками. Клітина з зірочкою може бути пофарбована лише у колір "2", тоді клітину з двома зірочками можна зафарбувати лише у колір "1". Але тоді клітину, яка позначена як "?", не можна буде зафарбувати у жоден з чотирьох кольорів.

1	3	*
2	4	**
	?	

Рис. 17

8. (Рубльов Богдан) Назвемо натуральне число близнюком, якщо у нього є два дільники з множини D, різниця між якими дорівнює 2. З'ясуйте, яких чисел більше серед перших 20112012 чисел: близнюків чи тих, що не є близнюками, якщо

а) D – множина усіх натуральних дільників числа від 1 до самого числа включно;

б) D – множина усіх натуральних дільників числа за винятком 1 та самого числа.

Відповідь: **а)** близнюків більше; **б)** більше тих, що не є близнюками.

Розв'язання. Для зручності позначимо число 20112012 через M, через M_K будемо позначати множину чисел, які не перевищують M та кратні числу K, а через N_K – кількість елементів множини M_K, тобто $N_K = |M_K|$. Добре відомо, що $N_K = \left[\frac{M}{K}\right]$.

а) (Задача № 6 за 8-й клас)

б) Позначимо кількість близнюків для цієї множини D через n, тоді

$$n < N_4 + N_{3\cdot5} + N_{5\cdot7} + N_{7\cdot9} + \ldots N_{(M-3)\cdot(M-1)},$$

оскільки тут підраховані усі числа-близнюки, а деякі навіть декілька разів, наприклад, число $945 = 3\cdot5\cdot7\cdot9$ підраховане відразу тричі. Таким чином, маємо, що

$$n < \left[\frac{M}{4}\right] + \left[\frac{M}{3\cdot5}\right] + \left[\frac{M}{5\cdot7}\right] + \left[\frac{M}{7\cdot9}\right] + \ldots + \left[\frac{M}{(M-3)\cdot(M-1)}\right] <$$

$$< \frac{M}{4} + \frac{M}{3\cdot5} + \frac{M}{5\cdot7} + \frac{M}{7\cdot9} + \ldots + \frac{M}{(M-3)\cdot(M-1)} =$$

$$= \frac{M}{4} + M\cdot\left(\frac{1}{3\cdot5} + \frac{1}{5\cdot7} + \frac{1}{7\cdot9} + \ldots + \frac{1}{(M-3)\cdot(M-1)}\right) =$$

$$= \frac{M}{4} + \frac{M}{2}\cdot\left(\frac{5-3}{3\cdot5} + \frac{7-5}{5\cdot7} + \frac{9-7}{7\cdot9} + \ldots + \frac{(M-1)-(M-3)}{(M-3)\cdot(M-1)}\right) =$$

$$= \frac{M}{4} + \frac{M}{2}\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{M-3} - \frac{1}{M-1}\right) =$$

$$= \frac{M}{4} + \frac{M}{2}\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{M-1}\right) < \frac{M}{4} + \frac{M}{6} = \frac{5M}{12} < \frac{M}{2},$$

що доводить, що у цьому випадку чисел-близнюків менше за половину від усіх чисел.

10 клас

5. (Мисак Данило) Розв'яжіть у натуральних числах (x, y) рівняння

$$(x+y)^3 = (x-y-6)^2.$$

Відповідь: $x = 1, y = 3$.

Розв'язання. Оскільки з рівності $a^3 = b^2, a > 1$, випливає, що $|b| = a^{\frac{3}{2}} > a$, а також враховуючи, що $x - y - 6 < x + y$, робимо висновок, що $|x-y-6| = y+6-x > x+y$. Звідси $x < 3$, а оскільки x натуральне, то або $x = 1$, або $x = 2$.

Якщо $x = 1$, маємо рівняння $(y+1)^3 = (y+5)^2$. Підставляючи $y = 1, 2, 3, 4$, отримаємо, що рівняння задовольняє лише $y = 3$, а для $y \geq 5$ маємо: $(y+1)^3 > y^3 > 4y^2 = (2y)^2 \geq (y+5)^2$.

Якщо $x = 2$, маємо рівняння $(y+2)^3 = (y+4)^2$. Підставляючи $y = 1, 2, 3$, отримаємо, що рівняння не задовольняє жодне з цих значень, а для $y \geq 4$ маємо: $(y+2)^3 > y^3 \geq 4y^2 = (2y)^2 \geq (y+4)^2$.

6. (Рубльов Богдан) Два гравці по черзі розставляють знаки $''+''$ або $''-''$ перед послідовними натуральними числами $1, 2, 3, \ldots$ і обчислюють суму усіх чисел, перед якими розставлені знаки. Так, перший гравець спочатку ставить знак перед числом 1, і це є його сумою після першого ходу, потім другий ставить знак перед числом 2 і рахує суму двох чисел – це є його сума після його першого ходу, далі перший гравець ставить знак перед числом 3 і рахує суму трьох чисел зі знаками – це його сума після другого ходу, далі другий гравець ставить знак перед числом 4 і рахує суму чотирьох чисел і т. д. Програє той гравець, після ходу якого одержана ним сума вперше за модулем стане більшою або рівною 2011. Хто переможе при правильній грі – перший чи другий гравець?

Відповідь: Другий гравець.

Розв'язання. Другий гравець кожного разу вибирає знак, протилежний до знаку останнього ходу першого гравця. У першого гравця ходи за модулем дорівнюють $1, 3, 5, \ldots$, будемо їх позначати $a_1, a_2, a_3, \ldots$, ходи другого за модулем дорівнюють $2, 4, 6, \ldots$, позначимо їх $b_1, b_2, b_3, \ldots$. Суми, які утворюються після k-го ходу першого, позначимо s_k, а після ходу другого – c_k. Доведемо ММІ, що $|s_k| \geq k$, $|c_k| \leq k$.

Для $n = 1$ це очевидно, оскільки $|s_1| = |c_1| = 1$.

Нехай для деякого k виконується $|s_k| \geq k$, $|c_k| \leq k$. Оскільки $|a_{k+1}| = 2k+1$, $|b_{k+1}| = 2k+2$, то маємо такі оцінки. Без обмеження загальності будемо вважати, що $0 \leq c_k \leq k$, тоді після ходу першого можливі варіанти:

1) якщо $a_{k+1} = 2k+1$, то $2k+1 \leq s_{k+1} \leq 3k+1$ і, відповідно, при $b_{k+1} = -(2k+2)$ маємо: $-1 \leq c_{k+1} \leq k-1$, тобто потрібні умови виконуються;

2) якщо $a_{k+1} = -(2k+1)$, то $-(2k+1) \leq s_{k+1} \leq -(k+1)$ (тобто $|s_{k+1}| \geq k+1$) і, відповідно, при $b_{k+1} = 2k+2$ маємо: $1 \leq c_{k+1} \leq k+1$, тобто потрібні умови виконуються.

Таким чином, оскільки гра закінчиться (при достатньо великих числах), ми маємо, що другий не може програти, оскільки спочатку перший долає межу k, а другий своїм ходом тільки цю межу повторює.

7. (Жидков Сергій) В трикутнику ABC, у якого $AC > BC > AB$, на сторонах BC та AC вибрали точки D і K відповідно так, що $CD = AB$, $AK = BC$. Точки F та L – середини відрізків BD та KC відповідно. Точки R, S – середини сторін AC та AB відповідно. Відрізки SL та FR перетинаються в точці O, при цьому $\angle SOF = 55°$. Знайдіть градусну міру $\angle BAC$.

Відповідь: $\angle BAC = 70°$.

Розв'язання. Проведемо бісектриси трикутника BQ та CT, J – інцентр (рис.18). Нехай прямі FR та AB перетинаються в точці M. Доведемо, що $FR \parallel BQ$ та $CT \parallel SL$. Позначимо довжини відрізків таким чином: $AB = CD = a$, $BF = FD = x$, $BM = y$.
З теореми Менелая для $\triangle ABC$ та прямої RM запишемо:

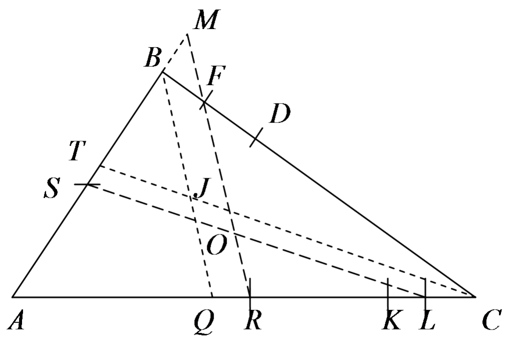

Рис. 18

$$\frac{AR}{RC} \cdot \frac{CF}{FB} \cdot \frac{BM}{MA} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1} \cdot \frac{a+x}{x} \cdot \frac{y}{a+y} = 1.$$

Звідси одержимо, що $x = y$ і $\triangle MBF$ – рівнобедрений. Тоді стає зрозумілою рівність таких кутів:

$$\angle ABQ = \angle QBC = \angle AMR = \angle BFM = \angle RFC,$$

звідки $FR \parallel BQ$. Аналогічно доводиться, що $CT \parallel SL$.

$\angle FOS = \angle BJT = 55° \Rightarrow \angle BJC = 125°$, оскільки J – інцентр, то $\angle BJC = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC$ $\Rightarrow \angle BAC = 70°$.

8. $\boxed{\textbf{Лейфура Валентин}}$ Нехай x, y, z – додатні дійсні числа такі, що $xyz = 1$. Доведіть нерівність:

$$(-x+y+z)(x-y+z) + (x-y+z)(x+y-z) + (x+y-z)(-x+y+z) \leq 3.$$

Розв'язання. Припустимо, що $z = \min\{x, y, z\}$. Перепишемо нерівність у вигляді

$$4xy \leq 3 + (x + y - z)^2.$$

Оскільки $x + y - z \geq 2\sqrt{xy} - z > 0$, то $(x + y - z)^2 \geq (2\sqrt{xy} - z)^2$. Таким чином, достатньо довести, що $3 + \left(2\sqrt{xy} - z\right)^2 \geq 4xy$. За умовою $xy = \frac{1}{z}$, тому, підставляючи в останню нерівність, маємо, що треба довести нерівність

$$3 + \left(\frac{2}{\sqrt{z}} - z\right)^2 \geq \frac{4}{z}.$$

Розкриваючи дужки, отримуємо нерівність: $z^2 + 3 \geq 4\sqrt{z}$, яка випливає з нерівності між середніми:

$$z^2 + 1 + 1 + 1 \geq 4\sqrt[4]{z^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 4\sqrt{z}.$$

Альтернативне розв'язання. Перепишемо нерівність у вигляді

$$2xy + 2yz + 2zx \leqslant 3 + x^2 + y^2 + z^2.$$

Нехай $x = a^3$, $y = b^3$, $z = c^3$, тоді, скориставшись нерівністю Шура $(u, v, w \geq 0)$:

$$u^3 + v^3 + w^3 + 3uvw \geq u^2v + v^2u + w^2u + u^2w + v^2w + w^2v,$$

а також нерівністю Коші для двох чисел, отримуємо

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 = a^6 + b^6 + c^6 + 3a^2b^2c^2 \geqslant a^4b^2 + a^2b^4 + b^4c^2 + b^2c^4 + c^4a^2 + c^2a^4 \geqslant$$

$$\geqslant 2a^3b^3 + 2b^3c^3 + 2c^3a^3 = 2xy + 2yz + 2zx.$$

11 клас

5. (Рожкова Марія) Коло проходить через вершини A та B трикутника ABC, дотикається сторони BC у точці B і вдруге перетинає сторону AC у точці E. Друге коло проходить через вершини A та C, дотикається сторони BC у точці C і вдруге перетинає сторону AB у точці D. Відрізки BE і CD перетинаються у точці F. Довести, що $\triangle BCF$ рівнобедрений.

Розв'язання. Позначимо через G другу точку перетину даних кіл. З'єднаємо G з вершинами трикутника (рис.19). Маємо: $\angle GBC = \angle BAG = \alpha$ (вимірюються половиною дуги BG першого кола). З іншого боку, $\angle GCD = \angle BAG = \alpha$ (вимірюються половиною дуги DG другого кола). Аналогічно, $\angle GBF = \angle CAG = \angle GCB = \beta$. Тоді $\angle FBC = \angle FCB = \alpha + \beta$, отже $\triangle FBC$ рівнобедрений, бо $BF = CF$.

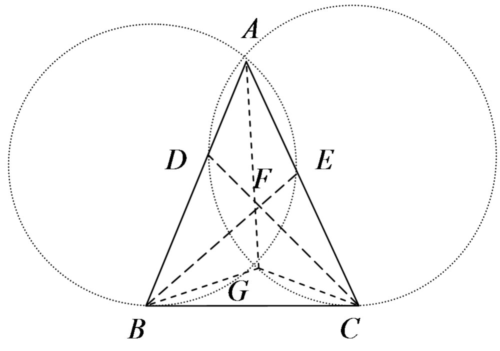

Рис. 19

6. (Гоголєв Андрій) Доведіть, що для будь-якого набору чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$, де $a_{2011} \neq 0$, існує функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якої при усіх дійсних x

$$a_1 f(x) + a_2 f(f(x)) + \ldots + a_{2011} \underbrace{f(f(f \ldots f(x) \ldots))}_{2011} = x.$$

Розв'язання. Будемо шукати функцію у вигляді $f(x) = kx$, де $k \neq 0$, тоді

$$\underbrace{f(f(f \ldots f(x) \ldots))}_{\mathrm{n}} = k^n x.$$

Тоді наведена рівність набуває такого вигляду:

$$a_1kx + a_2k^2x + \ldots + a_{2011}k^{2011}x = x.$$

Після скорочення на x маємо таке рівняння:

$$a_{2011}k^{2011} + a_{2010}k^{2010} + \ldots + a_2k^2 + a_1k - 1 = 0,$$

яке має принаймні один ненульовий розв'язок, оскільки це є многочлен непарного степеня з ненульовими старшим коефіцієнтом та вільним членом. Тобто, шукане k існує.

7.(Добосевич Олесь) Доведіть, що довільних дійсних a, b, c менших від 1 і таких, що

$$2(a + b + c) + 4abc = 3(ab + bc + ca) + 1,$$

виконується нерівність $a + b + c \leq \frac{3}{4}$.

Розв'язання.

Перепишемо рівність задану в умові таким чином:

$$4abc - 4(ab + bc + ca) + 4(a + b + c) - 4 = -(ab + bc + ca) + 2(a + b + c) - 3,$$

$$4(a - 1)(b - 1)(c - 1) = -(a - 1)(b - 1) - (a - 1)(c - 1) - (b - 1)(c - 1),$$

$$4 = \frac{1}{1 - a} + \frac{1}{1 - b} + \frac{1}{1 - c}.$$

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{1-x}$ на проміжку $(-\infty, 1)$. Оскільки $f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \geq 0$, то функція опукла (вниз), а отже можемо записати нерівність

$$4 = f(a) + f(b) + f(c) \geq 3f\left(\frac{a + b + c}{3}\right) = \frac{9}{3 - (a + b + c)}.$$

З останньої нерівності випливає нерівність задана в умові.

8. (Рибак Олександр) У ящику лежать іграшкові котики. У кожного котика голова пофарбована в один з 2011 кольорів, і хвіст також пофарбований в один з цих 2011 кольорів – можливо, у такий самий, а можливо, в інший. З ящика можна вибрати деяких котиків і скласти з них окремий набір. Набір вважається правильним, якщо він складається рівно з 2011 котиків, серед яких немає двох котиків з головами одного кольору і немає двох котиків з хвостами одного кольору. Відомо, що з ящика можна вибрати правильний набір більше, ніж в один спосіб. Довести, що у ящику можна залишити декількох котиків (можливо, всіх) таким чином, щоб вибрати правильний набір з цього ящика можна було рівно в два способи.

Розв'язання. Пронумеруємо кольори номерами від 1 до 2011. Побудуємо граф з вершинами $A_1, A_2, ..., A_{2011}$ та $B_1, B_2, ..., B_{2011}$. Для кожного котика проведемо у графі ребро таким чином. Якщо голова котика має колір i, а хвіст – колір j, то проведемо ребро між вершинами A_i та B_j. Тоді кожному котику відповідає деяке ребро графа. Правильному набору котиків буде відповідати вибірка з 2011 ребер, ніякі два з яких не мають спільної вершини. Таку вибірку ребер також називатимемо правильною. Нам потрібно залишити у графі декілька ребер таким чином, щоб з них можна було зробити правильну вибірку рівно в два способи. Покажемо, як це зробити.

За умовою, існують деякі дві різні правильні вибірки. Залишимо у графі тільки ті ребра, які належать хоча б одній з цих вибірок. Степенем вершини будемо називати кількість ребер, які з неї виходять. Для кожної правильної вибірки виконується така умова: з кожної вершини графа виходить рівно одне ребро, яке належить цій вибірці. Тому серед залишених ребер з кожної вершини виходить або одне ребро, яке належить обом вибіркам, або два ребра з різних вибірок. І якщо з якоїсь вершини V виходить тільки одне ребро, то з вершини, яка з'єднана з V цим ребром, теж виходить тільки це ребро.

Отже, граф розпадається на цикли та одинокі ребра – тобто такі, які не мають спільних вершин з іншими ребрами. Щоб довести це, вийдемо з деякої вершини степеня 2 і підемо по деякому ребру, яке з неї виходить. Кожного разу, приходячи до нової вершини, будемо іти далі по ребру, відмінному від того, по якому ми прийшли до цієї вершини. Оскільки вершина степеня 2 не може бути з'єднана з вершиною степеня 1, нам весь час буде, куди іти. Тому одного разу ми прийдемо до вершини, через яку вже проходили. Це може бути тільки вершина, з якої починався шлях, інакше степінь цієї вершини був би не менше від 3. Тобто, ми отримаємо цикл. Цей цикл не зв'язаний з іншими вершинами, адже всі його вершини мають степінь 2. Якщо залишаться ще вершини степеня 2, почнемо шлях з однієї з них і знайдемо ще один цикл. Будемо так продовжувати, поки всі вершини степеня 2 не будуть розподілені по циклах. Кожний такий цикл буде мати парну довжину, бо у ньому чергуються ребра з першої та другої вибірок. А всі вершини степеня 1 будуть кінцями деяких одиноких ребер.

Кожна правильна вибірка має такий вигляд: у неї входять всі одинокі ребра, а з кожного циклу попадає половина ребер таким чином, щоб узяті ребра не мали спільних вершин. З кожного циклу можна взяти потрібні ребра рівно в два способи. У графі є хоча б один цикл, тому що ми залишили ребра з двох різних, а не однакових вибірок. Якщо циклів більше від одного, то з усіх циклів, крім одного, видалимо половину ребер так, щоб залишені ребра не мали спільних вершин. В отриманому графі правильну вибірку можна зробити рівно в два способи.