П'ятниця, 10 липня 2015 р.

Задача 1. Скінченну множину $\mathcal{S}$ точок на площині будемо називати *збалансованою*, якщо для довільних різних точок A і B з множини $\mathcal{S}$ знайдеться така точка C з множини $\mathcal{S}$, що $AC = BC$. Множину $\mathcal{S}$ будемо називати *ексцентричною*, якщо для довільних трьох різних точок A, B і C з множини $\mathcal{S}$ не існує такої точки P з множини $\mathcal{S}$, що $PA = PB = PC$.

(а) Доведіть, що для довільного цілого $n \geqslant 3$ існує збалансована множина, що складається з n точок.

(б) Знайдіть всі цілі $n \geqslant 3$, для яких існує збалансована ексцентрична множина, що складається з n точок.

Задача 2. Знайдіть усі трійки натуральних чисел (a, b, c), для яких кожне з чисел

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

є степенем двійки.

(*Степенем двійки називається число вигляду* 2^n, *де* n — *ціле невід'ємне число.*)

Задача 3. Нехай ABC — гострокутний трикутник, у якого $AB > AC$, Γ — коло, описане навколо нього, H — його ортоцентр, а F — основа висоти, що проведена з вершини A. Нехай M — середина сторони BC. Нехай Q — така точка на колі Γ, що $\angle HQA = 90^\circ$, а K — така точка на колі Γ, що $\angle HKQ = 90^\circ$. Нехай точки A, B, C, K і Q різні і лежать на колі Γ в наведеному порядку.

Доведіть, що описані кола трикутників KQH і FKM дотикаються одне до одного.

Час виконання: 4 години 30 хвилин
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Субота, 11 липня 2015 р.

Задача 4. Нехай Ω — описане коло трикутника ABC, а точка O — його центр. Коло Γ з центром A перетинає відрізок BC у точках D і E так, що точки B, D, E і C усі різні та лежать на прямій BC у наведеному порядку. Нехай F і G — точки перетину кіл Γ і Ω, при цьому точки A, F, B, C і G лежать на Ω у наведеному порядку. Нехай K — друга точка перетину описаного кола трикутника BDF і відрізка AB. Нехай L — друга точка перетину описаного кола трикутника CGE і відрізка CA.

Нехай прямі FK і GL різні і перетинаються в точці X. Доведіть, що точка X лежить на прямій AO.

Задача 5. Нехай $\mathbb{R}$ — множина всіх дійсних чисел. Знайдіть усі функції $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що задовольняють рівність

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \;=\; x + f(x+y) + yf(x)$$

для довільних дійсних чисел x і y.

Задача 6. Послідовність $a_1, a_2, \ldots$ цілих чисел задовольняє такі умови:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ для всіх $j \geqslant 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ для всіх $1 \leqslant k < \ell$.

Доведіть, що існують два натуральних числа b і N такі, що

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leqslant 1007^2$$

для всіх цілих чисел m і n, що задовольняють умову $n > m \geqslant N$.

Час виконання: 4 години 30 хвилин
Кожна задача оцінюється в 7 балів