Во всех задачах $T_n(x)$ обозначает многочлен Чебышева 1-го рода.

Задача 1. Для многочлена $P(x)$ обозначим $\|P\| = \max_{x\in[-1,1]} |P(x)|$ — уклонение многочлена от 0 на $[-1,1]$. Докажите, что

(1) Если $P(x)$ — многочлен степени n со старшим коэффициентом 1, то $\|P\| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

(2) покажите, что равенство достигается тогда и только тогда, когда $P(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$.

(3) сформулировать и доказать соответствующие результат для отрезка $[-2,2]$.

Задача 2. Найти все корни $T_n(x)$, все точки, в которых его значения ± 1. Построить схематически график $T_n(x)$ (промежутки монотонности, поведение за $[-1,1]$, поведение на $[-1,1]$).

Задача 3. Будем говорить, что многочлены P, Q коммутируют, если $P(Q) = Q(P)$. Докажите, что при всех m, n многочлены T_m, T_n коммутируют.

Задача 4. Пусть $P_n(x) = 2T_n(x/2)$. Докажите, что $P_n(z+z^{-1}) = z^n + z^{-n}$.

Задача 5. Пусть $P(x)$ — многочлен степени не выше n, причём $|P(x)| \leqslant 1$ для всех $x \in [-1,1]$. Докажите, что тогда $|P^{(k)}(x)| \leqslant |T_n^{(k)}(x)|$ для всех $|x| \geqslant 1$ и всех $k \geqslant 0$.

Задача 6. Докажите, что $T_n(xy) \geqslant T_n(x)T_n(y)$ для всех $x, y \geqslant 1$.

Задача 7. Найти все многочлены u, v с действительными коэффициентами, такие, что $u^2 - (x^2-1)v^2 = 1$.

Задача 8. Найти все многочлены с действительными коэффициентами u, v такие, что $u^2 - (x^2+1)v^2 = -1$.

Задача 9. Последовательность $a_n, n \geqslant 1$ задана равенством $n^3 = \sum_{d|n} a_d$. Найти (как можно более краткое) выражение для a_n.