1. Нехай $m, n \in N$ та множина $\{1,2,\dots,n\}$ містить рівно m різних простих чисел. Доведіть, що серед довільних $m+1$ різних чисел з $\{1,2,\dots,n\}$ можна обрати одне, що ділитиме найменше спільне кратне інших m чисел.

2. Нехай a, n - натуральні числа, $a \geq (n-1)!$. Доведіть, що існують різні прості числа $p_1, \dots, p_n$ такі, що $p_i \mid a+i$ для усіх $i = 1,2,\dots,n$.

3. Припустимо, що $3^n - 2^n$ – степінь простого числа. Доведіть, що тоді n - просте число.

4. Нехай x та y - такі натуральні числа, що xy ділить x^2+y^2+1. Доведіть, що
$$\frac{x^2+y^2+1}{xy} = 3.$$

5. Знайдіть усі пари (a, b) натуральних чисел, для яких $a^{a^a} = b^b$.

6. Доведіть, що для довільного натурального n, число $7^{7^n}+1$ є добутком не менш ніж $2n+3$ (не обов'язково різних) простих чисел.

7. Нехай $a_1, \dots, a_n$ - натуральні числа більші 1 та a - натуральне число, що ділиться на добуток $a_1 a_2 \dots a_n$. Доведіть, що $a^{n+1}+a-1$ не ділиться на добуток $(a+a_1-1)(a+a_2-1)\dots(a+a_n-1)$.

8. Нехай P - множина усіх простих чисел та M - непорожня підмножина P. Припустимо, що для довільної підмножини $p_1, p_2, \dots, p_k$ множини M, всі прости дільники $p_1 p_2 \dots p_k + 1$ також належать M. Доведіть, що $M = P$.

9. Доведіть, що існує многочлен від трьох змінних $P(x,y,z)$ з цілими коефіцієнтами, що має таку властивість: натуральне число n не є повним квадратом тоді і тільки тоді, коли існує трійка цілих чисел (x,y,z), для яких $P(x,y,z) = n$