

Метод математичної індукції

«...випросив залишитися на одну нічку; від однієї нічки дві нічки, від двох нічок два тижні, від двох місяців два роки, а від двох років жив усе життя».

1. Довести, що

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Довести, що для всіх $n \in \mathbb{N}$

а) $n^3 + 5n : 6$; б) $4^n + 15n - 1 : 9$.

3. Довести, що правильний трикутник можна розрізати на n правильних трикутників (можливо, різних) для будь-якого $n \geq 6$.

4. У країні дурнів є монети вартістю $1, 2^1, \dots, 2^n$. У Буратіно є по одній монеті кожної вартості. Довести, що Буратіно зможе купити без здачі будь-яку річ, що коштує не більше $2^{n+1} - 1$.

5. Довести, що

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

6. Довести, що квадрат $2^n \times 2^n$ з вирізаною кутовою клітинкою можна розрізати на кутики із трьох клітинок.

7. Для дійсних чисел x_1, \dots, x_n довести нерівність

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|.$$