Комба

1. На колі стоять сині і червоні точки. Дозволяється добавити або забрати червону точку і змінити кольори її сусідів. Менше двох точок лишати не можна. Нехай на початку було всього дві червоні точки. Доведіть, що за кілька операцій не можна отримати випадок, в якому всі точки на колі це дві сині точок.

2. Фігура (n,k)- кінь кожним ходом переміщується на n позицій по одному з двох напрямків і на k по іншому (звичайний кінь, таким чином, — (2, 1)-кінь). При заданих n і k визначте, у яку найменшу кількість кольорів можна розфарбувати нескінчену клітчасту дошку так, щоб (n,k)- кінь обов'язково попадав на клітинку іншого кольору кожним ходом.
3. Є тенісний стіл і 15 тенісистів. Кожну партію грають двоє, а інші 13 стоять у черзі. Гравець, який програє партію, стає у кінець черги, а той, хто виграв, грає з тим, хто був у черзі першим. Чи може у деякий момент виявитися, що кожен тенісист виграв у кожного з інших рівно одну партію?
4. Незвичайна гра у хрестики-нулики 3×3. Правила лишаються тими самими, лише з тією різницею, що кожен гравець може своїм ходом поставити або хрестик, або нулик. Перемагає той, хто першим поставить рядок з трьох однакових фігур. Хто виграє при правильній грі і чому?
5. Назвемо учасника колового турніру (кожен грає з кожним) дивним, якщо він виграв в усіх, хто набрав більше очок, ніж він, і програв всім, хто набрав менше очок, ніж він (перемога дає 1 очко, нічия — 1/2 очка, програш — 0 очок). Доведіть, що всі дивні учасники турніру набрали однакову кількість очок.
6. Три гравці — Веня, Беня і Женя ходять по черзі. Першим ходить Веня, потім — Беня, потім — Женя і т. д. Кожен гравець своїм ходом забирає один або два камінці з купки, у який на початку гри знаходяться 5769 камінців. Той, хто забрав останній камінець, отримує 10 доларів, наступний за ним у черзі — 1 долар, а той, хто лишився, нічого не отримує. Хто скільки отримає при правильній грі (без домовленостей і коаліцій)?
7. У таблиці $n\times n$ клітинок стоять «+» і «-». Дозволяється взяти клітинку і поміняти знаки у стовпчику і рядочку, які проходять через цю клітинку (при цьому знак самої клітинки також змінюється). Знайдіть всі n, при яких з будь-якого початкового положення знаків у таблиці можна перейти зо таблиці з одних плюсів.
8. Клітинки прямокутника 99×101розфарбовані у червоний та синій колір. Доведіть, що знайдеться клітинка, для якої у стовпчику та у рядочку, яким вона належить, знайдеться ще принаймні 99 клітинок того самого кольору.
9. У місті N відбулися вибори мера, у яких взяли участь всі мешканці міста. Кандидат-переможець отримав більше половини голосів, причому за нього проголосувало 96% політично неграмотного населення і 4% політично грамотного населення. Доведіть, що якби 40% грамотного населення не прийшли на вибори, то цей кандидат зібрав би більше 60% голосів (від кількості тих, хто з'явився).
10. У компанії, яка складається з 2010 осіб, кожен є або лицарем, або брехуном. Люди в компанії пронумеровані числами від 1 до 2010. Для кожного $k=1, 2,\ldots,2010$ людина з номером k сказала таке: «Кількість брехунів серед нас є дільником k.» Скільки брехунів може бути у такій компанії?

11. Натуральні числа від 1 до 2011 пофарбовані у червоний та синій кольори. Є пара синіх і пара червоних чисел з однаковими добутками. Доведіть, що можна обрати пару синіх і пару червоних чисел з однаковими сумами.
12. Вася склав розклад шахового турніру для 8 осіб (кожен грає з кожним, у кожному турі одночасно граються 4 партії). У якої найбільшої кількості гравців кольори фігур від туру до туру можуть чергуватися?
13. В одноколовому турнірі взяло участь 12 шахістів. Яку найменшу кількість днів може тривати цей турнір, якщо кожен учасник гає не більше однієї партії у день і жодні дві партії поспіль не грає чорними фігурами?
14. На дошці виписані 10 натуральних чисел. За одну операцію дозволяється збільшити на 1 будь-які три числа, що стоять поруч. Чи завжди можна такими операціями домогтися того, щоб усі числа ділилися на 4?
15. На дошці записані числа від 1 до 102. Вася і Джон ходять по черзі, починає Вася. За один хід потрібно замінити два числа на їх суму. Якщо одне з двох чисел, що лишилися на дошці, ділиться на інше, то виграє Джон, інакше — Вася. Хто з них може виграти?
16. Є хамелеони трьох кольорів 13 червоного, 15 зеленого і 7 синього. Якщо зустрічаються два хамелеона різного кольору, то вони одночасно міняють свій колір на третій. Чи може так статись, що через деякий час всі хамелеони стануть одного кольору?