Многочлени-1

1. Відомо, що $P(x) \geqslant 0$ для усіх $x \in \mathbb{R}$. Доведіть, що існують два многочлени $A, B \in \mathbb{R}_{[x]}$ такі, що
$$P(x) = A(x)^2 + B(x)^2.$$
(Ви маєте знати як $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ подати у вигляді суми двох квадратів).

2. Знайти многочлен $P(x) \in \mathbb{R}_{[x]}$ степеня не більше 5 і такий, що
$$P(x) - 1 \vdots (x-1)^3, \quad P(x) + 1 \vdots (x+1)^3.$$

3. $P_1P_2 \dots P_n$ — правильний многокутник, що вписаний в одиничне коло. Знайдіть $P_1P_2 \cdot P_1P_3 \cdot \ldots P_1P_n$.

4. **Узагальнений критерій Ейзенштейна.** Нехай $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ — многочлен з цілими коефіцієнтами. Якщо існують просте число p і ціле $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ такі, що
$$p \mid a_0, a_1, \dots, a_k, \quad p \nmid a_{k+1}, \quad p^2 \nmid a_0,$$
то $P(x)$ має незвідний дільник над $\mathbb{Z}$ степеня більше k.

5. Нехай $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, де $n > 1$. Доведіть, що $f(x)$ — незвідний над $\mathbb{Z}$.

6. Знайти кубічний многочлен Q такий, що $Q(i) = 2^i$ для $i = 0, 1, 2, 3$.

7. Для многочлена $P(x) = (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2} \dots (x-x_n)^{k_n}$ доведіть тотожність
$$P'(x) = P(x)\Big(\frac{k_1}{x-x_1} + \frac{k_2}{x-x_2} + \dots + \frac{k_n}{x-x_n}\Big).$$