Тренувальні збори для команди України на IMO
та найнайближчого резерву.
Геометрія

Данило Хілько dkhilko@ukr.net

Червень 2016

1 Серія 1

1. Кола ω_1 і ω_2 з центрами O_1, O_2 дотикаються зовнішнім чином в точці D і внутрішнім до кола ω в точках E, F відповідно. Пряма t є спільною внутрішньою дотичною ω_1, ω_2. Нехай AB — діаметр ω, що є перпендикулярним до t, так що A, E, O_1 лежать в одній півплощині відносно t. Доведіть, що прямі AO_1, BO_2, EF, t перетинаються в одній точці.

2. В трикутнику ABC відмітили точки A_0, B_0, які є точками дотику BC з вписаним колом, а також точку перетину відрізків AA_0 та BB_0. Після цього трикутник стерли. Відновіть його за допомогою циркуля та лінійки.

3. На сторонах AB і BC паралелограма $ABCD$ обрано точки A_1 та C_1 відповідно. Відрізки AC_1 та CA_1 перетинаються в точці P. Описані кола трикутників AA_1P, CC_1P вдруге перетинаються в точці Q, яка лежить всередині трикутника ACD. Доведіть, що $\angle PDA = \angle QBA$.

4. Нерівнобедрений трикутник ABC вписано в коло ω. Дотична до цього кола в точці C перетинає пряму AB в точці D. Нехай I — інцентр вписаного кола трикутника ABC. Прямі AI, BI перетинають бісектрису кута CDB в точках Q і P відповідно. Нехай M — середина PQ. Доведіть, що пряма MI проходить через середину дуги ACB кола ω.

5. Трикутник ABC вписано в коло ω. Дотичні до ω в B та C перетинаються в T. Точка S лежить на промені BC, причому $AS \perp AT$. Точки B_1 та C_1 лежать на промені ST (C_1 між B_1 та S) так що $B_1T = BT = C_1T$. Доведіть, що трикутники ABC та AB_1C_1 подібні.

6. Бисектриси BB_1 і CC_1 трикутника ABC перетинаються в точці I. Пряма B_1C_1 перетинає описане коло трикутника ABC в точках M і N. Доведіть, що радіус описаного кола трикутника MIN вдвічі більше, ніж радіус описаного кола ABC.

7. В трикутнику ABC відмітимо центроїд G. Нехай P — овільна точка на стороні BC. Точки Q та R лежать на AC та AB відповідно так, що $PQ \parallel AB$ та $PR \parallel AC$. Доведіть, що коли P рухається по відрізку BC, описані кола трикутників AQR проходять через фіксовану точку X таку, що $\angle BAG = \angle CAX$.

8. Коло з центром O вписано в кут BAC і дотикається його сторін в точках B і C. Всередині кута BAC обрано точку Q. На відрізку AQ взято таку точку P, що $AQ \perp OP$. Пряма OP перетинає кола ω_1, ω_2, описані навколо трикутників BPQ, CPQ вдруге в точках M, N, Доведіть, що $OM = ON$.

9. Нехай $ABCD$ — опуклий чотирикутник, а E та F точки на сторонах AD та BC відповідно такі, що $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$. Промінь FE перетинає промені BA та CD в S і T, відповідно. Доведіть, що описані кола трикутників SAE, SBF, TCF та TDE мають спільну точку.

10. В гострокутному трикутнику ABC проведена висота AH. Точки X та Y на сторонах AB та AC відповідно такі, що $AXHY$ паралелограм. Прямі XY та BC перетинаються в точці D. Доведіть, що $DB \cdot DC = DH^2$.

11. З вершини C трикутника ABC проведено дотичні CX, CY до кола, що проходить через середини сторін трикутника. Доведіть, що прямі XY, AB і дотична в точці C до описаного кола трикутника ABC перетинаються в одній точці.

12. Точка P лежить всередині трикутника ABC. Точки X, Y, Z — основи перпендикулярів, проведених з неї на сторони BC, CA и AB соответственно. Точка P' всередині трикутника ізагонально спряжена до P. Коло ω р центром в точws P має радіус $2r$, де r — радsус описаного кола трикутника XYZ. Промені YP' та ZP' перетинають ω в точках M і N. Пряма MN перетинає YZ в точці K. Точка T — проекція K на PA. Доведіть, що
$$PT \cdot PA = 4r^2.$$

13. В кут вписано два кола ω и Ω. Пряма ℓ перетинає сторони кута в точках A і F, коло ω в точках B і C, коло Ω в точках D і E (порядок точок на прямій — A, B, C, D, E, F. Припустимо, що $BC = DE$. Доведіть, що $AB = EF$.

2 Задачі з зірочкою

1. В трикутнику ABC медіани AM_A, BM_B, CM_C перетинаються в точці M. Побудуємо коло Ω_A, що проходить через середину відрізка AM і дотикається до BC в точці M_A. Кола Ω_B, Ω_C побудовані аналогічно. Доведіть, що Ω_A, Ω_B, Ω_C перетинаються в одній точці.

2. Трикутник ABC $(AB > BC)$ вписано в коло Ω. На сторонах AB, BC обрано точки M, N відповідно так, що $AM = CN$. Прямі MN, AC перетинаються в точці K. Нехай P — інцентр трикутника AMK, а Q — центр зовнівписаного кола трикутника CNK, що дотикається до сторони CN. Доведіть, що середина дуги ABC Ω рівновіддалена від точок P, Q.

3. Дано шестикутник $ABCDEF$, який не є опуклим, але без самоперетинів, причому жодні дві сторони не є паралельними. Внутрішні кути задовольняють умови: $\angle A = 3\angle D$, $\angle C = 3\angle F$ та $\angle E = 3\angle B$. Крім того, $AB = DE$, $BC = EF$, а також $CD = FA$. Доведіть, що діагоналі $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ та $\overline{CF}$ перетинаються в одній точці.