Відбір міста Києва на Всеукраїнську олімпіаду

I тур

Умови та розв'язки по усіх класах

8 клас

1. Знайти ціле число, яке найближче до значення виразу

$$\left(\frac{4012}{1}-\frac{4010}{2}+\frac{4008}{3}-\frac{4006}{4}+\ldots-\frac{2}{2006}+\frac{0}{2007}-\frac{-2}{2008}+\frac{-4}{2009}-\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{-4012}{4013}-\frac{-4014}{4014}\right)-\left(\frac{2006}{2008}+\frac{2005}{2009}+\frac{2004}{2010}+\ldots+\frac{1}{4013}\right).$$

Відповідь: 2007.

Розв'язання. Нехай

$$A=\left(\frac{4012}{1}-\frac{4010}{2}+\frac{4008}{3}-\ldots-\frac{2}{2006}+\frac{0}{2007}-\frac{-2}{2008}+\ldots+\frac{-4012}{4013}-\frac{-4014}{4014}\right)=$$
$$=\left(\frac{4014}{1}-2\right)-\left(\frac{4014}{2}-2\right)+\left(\frac{4014}{3}-2\right)-\left(\frac{4014}{4}-2\right)+\ldots+\left(\frac{4014}{4013}-2\right)-\left(\frac{4014}{4014}-2\right)=$$
$$=4014\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\frac{1}{4013}-\frac{1}{4014}\right)=4014\cdot B.$$
$$C=\left(\frac{2006}{2008}+\frac{2005}{2009}+\frac{2004}{2100}+\ldots+\frac{1}{4013}\right)=$$
$$=\left(1+\frac{2006}{2008}\right)+\left(1+\frac{2005}{2009}\right)+\left(1+\frac{2004}{2010}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{4013}\right)+\left(1+\frac{0}{4014}\right)-2007=$$
$$=\left(\frac{4014}{2008}+\frac{4014}{2019}+\frac{4014}{2010}+\ldots\frac{4014}{4013}+\frac{4014}{4014}\right)-2007=$$
$$=4014\left(\frac{1}{2008}+\frac{1}{2009}|\ldots+\frac{1}{4014}\right)-2007=4014\cdot D-2007.$$

Використовуючи відоме співвідношення

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n},$$

маємо що $B=D$, а тому $A-C=4014B-4014D+2007=2007$.

2. У гострокутному трикутнику ABC проведені висота CH та медіана BM, які перетинаються у точці T. Виявилось, що $\angle MCH=\angle MBC$ та $CH=BM$. Знайти кути трикутника ABC.

Відповідь: трикутник правильний, тому усі кути по $60°$.

Розв'язання.

Проведемо у прямокутному $\triangle ACH$ медіану MH, тоді за властивостями прямокутних трикутників, $MH=MC$, звідки $\angle MCH=\angle MHC$, але тоді рівні кути $\angle MHC=\angle MBC$ спираються на спільний відрізок MC, звідки 4 точки M,C,B,H лежать на одному колі (рис.1). Тому $\angle MCH=\angle MBH$, таким чином відрізок BM не тільки медіана, а ще й бісектриса, а також висота. Таким чином у трикутнику ABC рівні сторони $BC=BA$.

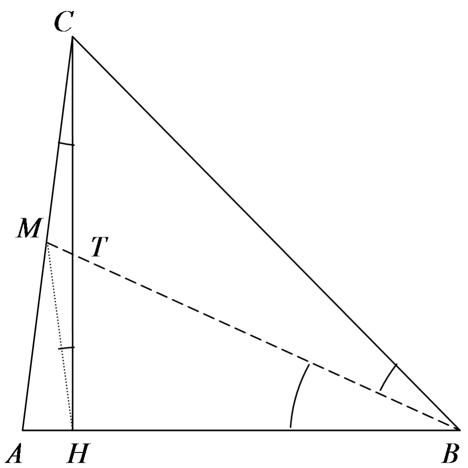


Рис.1

Розглянемо тепер два прямокутні трикутник MBA та CHA. У них однакові кути та рівні відповідні катети $CH = BM$, тому вони рівні. Звідси випливає, що і гіпотенузи також рівні, тобто $CA = AB$, з урахуванням раніше одержаного маємо, що усі три сторони рівні, а тому він правильний.

3. Чи можна числа $1, 2, \dots, 100$ розташувати у комірках таблиці 10×10 таким чином, щоб виконувались наступні умови (через $C(i, j)$ позначимо, число, яке розташоване у комірці на перетині i-го рядку та j-го стовпчика):

   1) у кожному рядку сума чисел дорівнює S;

   2) у кожному стовпчику також сума чисел дорівнює S;

   3) для кожного $k = \overline{1, 10}$ сума чисел $C(i, j)$, для яких $i - j \equiv k \pmod{10}$ також дорівнює S?

   <u>Відповідь:</u> не можна.

   <u>Розв'язання</u>. Припустимо, що таке заповнення існує. Оскільки сума усіх чисел $\frac{100 \cdot 101}{2} = 5050 \Rightarrow S = 505$ – непарне число. Розіб'ємо усі значення на такі 4 множини. A – сукупність чисел $C(i, j)$, для яких i, j – непарні; B – непарні i, парні j; C – парні i, непарні j; D – сукупність чисел $C(I, j)$, для яких i, j – парні. Суми чисел кожної множини позначимо відповідно S_A, S_B, S_C та S_D.

   A, B містять комірки, що розташовані у непарних рядках, тобто $S_A + S_B = 5S$.

   B, D містять комірки з парними стовпчиками, тому $S_B + S_D = 5S$.

   A, D містять усі комірки, для яких $(i - j)$ – парне, тому $S_A + S_D = 5S$.

   Якщо додати одержані нерівності, одержимо, що $2 \cdot (S_A + S_B + S_C) = 15S$ – справа непарне число, звідки й випливає неможливість відповідного заповнення.

4. Нехай M, N – два дев'ятицифрових числа з такою властивістю: якщо взяти довільну цифру числа M та поміняти на відповідну цифру числа N (із збереженням позиції), то вийде число, яке кратне 7.

   а) Довести, що аналогічна заміна із цифрами числа N на відповідні цифри числа M дає число, що буде кратне 7.

   б) Знайти таке натуральне число $d > 9$, що вищенаведені результати стосовно подільності на 7 зберігається, якщо ці числа M, N є d-цифровими числами.

   <u>Відповідь:</u> ***б)*** $d \equiv 2 \pmod 7$.

   <u>Розв'язання</u>. Нехай $d \equiv 2 \pmod 7$ та $M = \sum\limits_{k=0}^{d-1} 10^k a_k$ та $N = \sum\limits_{k=0}^{d-1} 10^k b_k$, d – кількість цифр числа. За умовою має місце властивість: число $M - 10^k a_k + 10^k b_k$ кратне 3 для кожного k, або $M \equiv 10^k a_k - 10^k b_k \pmod 7$. Додамо усе це по $k = \overline{0, d-1}$ одержимо, що

   $$dM \equiv \sum_{k=0}^{d-1} 10^k a_k - \sum_{k=0}^{d-1} 10^k b_k = M - N \pmod 7.$$

   Тому $N + (d-1)M \equiv N + M \equiv 0 \pmod 7$.

   Оскільки для кожного k виконуються умови $M \equiv 10^k a_k - 10^k b_k \pmod 7$, то $M + N \equiv 10^k a_k - 10^k b_k + N \pmod 7 \Rightarrow N \equiv 10^k b_k - 10^k a_k \pmod 7$, що й треба було довести у пункті а). Стосовно пункту б) ми бачимо, що відповіддю є наведена група чисел $d \equiv 2 \pmod 7$.

<u>9 клас</u>

1. Задача 8.1

2. Олеся та Андрійко грають у таку гру. У кожного з них є колода, що містить k карти, Олеся випадковим чином вибирає зі своєї колоди 2 карти, а Михалик так само випадковим чином вибирає із своєї колоди 2 карти. Якщо серед цих 4 карт є принаймні дві однакові, то перемагає Олеся, а якщо ні, то Андрійко. При якому найбільшому значенні k імовірність перемоги Олесі не менше 50 відсотків (більше або дорівнює $\frac{1}{2}$)?

   Відповідь: $n = 7$.

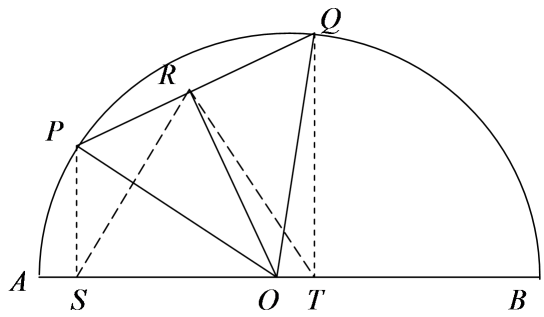
   Розв'язання. Обчислимо імовірність перемоги Андрійка, тобто коли серед цих 4 карт немає однакових. Це означає, що після вибору Олесі, залишається у Андрійка така ситуація. Він повинен вибрати 2 карти з k, тобто таких усіх можливостей C_k^2, а от щоб він переміг усі ці карти треба вибрати серед $k-2$ карт. Тобто виграшних варіантів усього C_{k-2}^2, тобто імовірність його виграшу це частка $\frac{C_{k-2}^2}{C_k^2}$. Нам треба знайти, при якому найбільшому k виконується нерівність $\frac{C_{k-2}^2}{C_k^2} < \frac{1}{2}$. Залишається розв'язати цю нерівність, та знайти найбільше натуральне n, при якому вона виконується.

$$\frac{C_{k-2}^2}{C_k^2} = \frac{(n-2)!(n-2)!}{n!(n-4)!} = \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)} < \frac{1}{2}.$$

   Звідси маємо, що $n^2-9n+12 < 0 \Rightarrow n \in \left(\frac{9-\sqrt{33}}{2}, \frac{9+\sqrt{33}}{2}\right)$. Як легко переконатись, найбільше натуральне значення, що задовольняє цю нерівність, це $n = 7$.

3. Хорда PQ з серединою у точці R проведена у колі з діаметром AB. Проведені два перпендикуляри PS та QTдо цього діаметра. Довести, що трикутник RST правильний тоді і тільки тоді, коли $2PQ = AB$.

   Розв'язання. Нехай центр кола O, який лежить проміж точками S і T. Тоді $OP = OQ$ звідки випливає, що $\angle PQO = \angle QPO$, оскільки R – середина хорди PQ, тому $OQ \perp PQ$, тому точки O, R, Q, T циклічні (рис.2). Тоді маємо таку рівність кутів: $\angle OTR = \angle OQR = \angle OPR = \angle OSR$. Звідси випливає, що $\triangle OPQ \sim \triangle RST$, тому $\triangle OPQ$ правильний тоді і тільки тоді, коли правильним є $\triangle RST$. Цей трикутник має рівні сторони $OP = OQ = r$, тому він буде рівносторонnім за умови, що $PQ = OP = \frac{1}{2}AB$, що й треба було довести.



4. Задача 8.4

<u>10 клас</u>

1. Нехай натуральне $n \geq 2$ є дільником числа $3^n + 4^n$. Довести, що 7 є дільником числа n.

   Розв'язання. Очевидно, що число n – непарне і не ділиться на 3. Нехай p – найменший простий дільник числа n. Нехай c таке натуральне число, що $0 < c < p$ та $4c \equiv 3 \pmod{p}$. Таке число c існує, оскільки $(3, 4) = 1$. Тоді ми маємо: $4^n(c^{2n} - 1) = (c^n - 1)((4c)^n + 4^n) \equiv (c^n - 1)(3^n + 4^n) \equiv 0 \pmod{p}$. Таким чином p – дільник числа $(c^{2n} - 1)$. Нехай $c^d \equiv 1 \pmod{p}$, тоді $d \,|\, (2n)$, а за малою теоремою Ферма $d \,|\, (p-1) \Rightarrow d \,|\, (2n, p-1)$. Нехай q – деякий простий дільник числа d, тоді також $q \,|\, (2n, p-1)$. Якщо $d \,|\, n$, то $q \geq p$, звідки $q \nmid (p-1)$. Таким чином, $q = 2$ – єдина можливість, що не призводить до суперечності. Тому $d = 2$ і, відповідно, $c^2 \equiv 1 \pmod{p}$. Якщо $p \,|\, (c-1)$, то $4 \equiv 4c \equiv 3 \pmod{p}$ – суперечність. Тому $p \,|\, (c+1)$, що дає $0 \equiv 4c + 4 \equiv 3 + 4 \equiv 7 \pmod{p}$. Тобто $p \,|\, 7 \Rightarrow p = 7$.

   Тому $n \,\vdots\, 7$, що й треба було довести.

2. Задача 9.2

3. Задача 9.3

4. Дійсні числа $x, y, z \in (0,1)$ задовольняють умову $\sqrt{\frac{1-x}{yz}} + \sqrt{\frac{1-y}{xz}} + \sqrt{\frac{1-z}{yx}} = 2$. Знайти максимальне можливе значення добутку xyz.

   Відповідь: $\frac{27}{64}$.

   Розв'язання. Позначимо $u = \sqrt[6]{xyz}$, тоді з умов задачі та нерівності Коші-Буняковського

$$2u^3 = 2\sqrt{xyz} = \left(\sqrt{\frac{1-x}{yz}} + \sqrt{\frac{1-y}{xz}} + \sqrt{\frac{1-z}{yx}}\right)\sqrt{xyz} =$$

$$= \sqrt{x(1-x)} + \sqrt{y(1-y)} + \sqrt{z(1-z)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{x(3-3x)} + \sqrt{y(3-3y)} + \sqrt{z(3-3z)}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{x+(3-3x)}{2} + \frac{y+(3-3y)}{2} + \frac{z+(3-3z)}{2}\right) =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\sqrt[3]{xyz} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}u^2.$$

   Таким чином $4u^3 + 2\sqrt{3}u^2 - 3\sqrt{3} \leq 0 \Leftrightarrow (2u - \sqrt{3})(2u^2 + 2\sqrt{3}u + 3) \leq 0$. Оскільки квадратний тричлен додатний, то $u \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ або $xyz \leq \frac{27}{64}$. Це значення досягається при $x = y = z = \frac{3}{4}$, тому $\frac{27}{64}$ – шукане максимальне значення.

11 клас

1. Задача 10.1

2. Нехай N – натуральне. Припустимо, що сукупність чисел, що записані на дошці задовольняють такі властивості:

   1) кожне записане число k задовольняє умову: $1 \leq k \leq N$;

   2) кожне $1 \leq k \leq N$ записане принаймні один раз;

   3) сума усіх записаних чисел парна.

   Довести, що можна пофарбувати деякі із записаних чисел у білий колір, а решту у чорний таким чином, що суми чисел одного кольору будуть рівними.

   Розв'язання. Припустимо, що ми записали усі числа у неспадному порядку, тобто $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_m$. Покажемо послідовність фарбування чисел. Спочатку a_1 фарбуємо у білий колір. А у подальшому поступаємо таким чином – якщо сума білих більша від суми чорних, то фарбуємо наступне число у чорний, інакше - у білий. Дуже легко ММІ показати, що за такого правила фарбування модуль різниці між числами різного кольору при черговому фарбуванні a_i не перевищує цього числа. Якби вона перевищувала, то невірно зроблене передостаннє фарбування, оскільки сусідні числа відрізняються не більше ніж на 1.

   Оскільки останнє число $a_m = 1$, то перед його фарбуванням різниця не перевищує $a_{m-1} \leq 2$, оскільки усі числа присутні на дошці. Сума усіх чисел парна, тому, різниця не може відрізнятись на 2, оскільки тоді при додаванні останнього числа загальна сума стане непарною. Таким чином, перед фарбуванням останнього числа ці суми повинні відрізнятись щонайбільше на 1, тоді відповідним фарбуванням останнього числа ми зробимо ці суми рівними. Що й треба було довести.

3. Два кола γ_1 та γ_2 з центрами у точках O_1 та O_2 і радіусами 4 та 9 відповідно дотикаються зовнішнім чином у точці B. Спільна зовнішня дотична до цих кіл дотикається більшого кола у точці N і перетинає спільну внутрішню дотичну у точці K. Знайти радіус кола, що вписане у чотирикутник $BKNO_2$.

Відповідь: $\frac{18}{5}$.
Розв'язання. Розглянемо позначення, як на рис.2, зокрема, тут позначено відрізки $SA = x, SM = y, BK = z$. Тоді чотирикутники $BKNO_2$ та $UKWV$ подібні, при цьому ми знаємо радіус кола, що вписане у другий чотирикутник, це більше із заданих кіл, яке має радіус 9. Тому залишається знайти відношення відповідних відрізків.

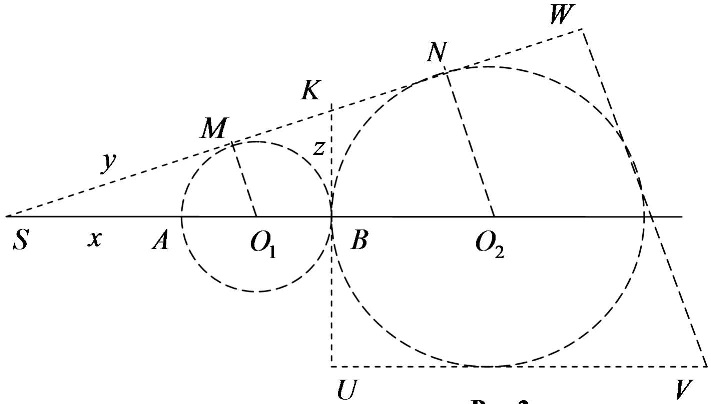


Рис.2

З подібності трикутників SMO_1 та SNO_2 маємо $\frac{SO_1}{O_1M} = \frac{SO_2}{O_2N}$ або $\frac{x+4}{4} = \frac{x+17}{9}$, звідки $x = \frac{32}{5}$, з $\triangle SMO_1$ знаходимо, що $y = \frac{48}{5}$, далі з подібності $\triangle SMO_1 \sim \triangle SBK$ маємо, що $\frac{y}{4} = \frac{x+8}{z}$ $\Rightarrow z = 6$.

Тепер, якщо позначити радіус вписаного у чотирикутник $BKNO_2$ кола через r, то з подібності вказаних чотирикутників можемо записати таке відношення: $\frac{KB}{KU} = \frac{r}{R_2} \Rightarrow$ $r = \frac{9z}{z+9} = \frac{18}{5}$, що й треба було знайти.

4. Задача 10.4