Геометрия - 3

Хилько Данил dkhilko@ukr.net

1. $ABCDEF$ — выпуклый шестиугольник, в котором $\angle A = \angle D$ и $\angle B = \angle E$. Пусть K и L — середины сторон AB, DE соответственно. Докажите, что сумма площадей треугольников KAF, KCB, CFL равна половине площади шестиугольника тогда и только тогда, когда
$$\frac{BC}{CD} = \frac{EF}{FA}.$$
2. В трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) отмечены середины диагоналей AC, BD — точки P, Q соответственно. Докажите, что если $\angle ABP = \angle CBD$, то $\angle BCQ = \angle ACD$.
3. В треугольнике ABC проведена высота CF и медиана BM. Известно, что $BM = CF$, $\angle MBC = \angle FCA$. Докажите, что треугольник ABC — правильный.
4. Дана окружность ω и точка P вне неё. Из точки P проводятся касательные PB, PA к окружности. Секущая, проходящая через P пересекает ω в Q, R. Пусть S — такая точка на ω, что $SB \parallel RQ$. Докажите, что SA делит отрезок QR пополам.
5. В треугольнике ABC $\angle A = 60°$. Внутри него выбрана точка T, такая что $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA$. Пускай M — середина BC. Докажите, что $TA + TB + TC = 2AM$.
6. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle A = 90°$). Пусть M — середина AB. Перпендикуляр, опущенный из A, пересекает BC в P. Докажите, что $MP + PA = MC$ и $\angle BMP = \angle AMC$.
7. Известно, что стороны треугольника ABC удовлетворяют соотношению
$$\frac{BC}{AB - BC} = \frac{AB + BC}{AC}.$$
Найдите отношение $\angle A : \angle C$.
8. В треугольнике ABC проведены высоты BP и CQ и отмечены их середины M, N соответвтственно. Описанные окружности треугольников BQM и PNC пересекают BC в точках X, Y. Докажите, что $BX = CY$.
9. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка L так, что AL в два раза больше медианы CM. Оказалось, что угол ALC равен $45°$. Докажите, что AL и CM перпендикулярны.
10. Дан правильный треугольник ABC с центром O. Прямая, проходящая через вершину C, пересекает описанную окружность треугольника AOB в точках D и E. Докажите, что точки A, O и середины отрезков BD, BE лежат на одной окружности.