Інтерполяція та різницеві многочлени

1. а) Доведіть, що многочлен степеня n однозначно задається своїми значеннями в n+1 точці.

б) Побудуйте многочлен степеня n, який у точці x_0 приймає значення 1, а в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$ – 0

в) Побудуйте многочлен степеня не більше за n, який у точках $x_0, x_1, \dots, x_n$ приймає значення $y_0, y_1, \dots, y_n$ відповідно.

2) Многочлен $P(x)$ степеня n такий, що $P(k) = 2^k$ для усіх цілих чисел k від 0 до деякого натурального n. Знайдіть $P(n+1)$.

3) Нехай F – унітарний поліном степеня n. Доведіть, що нерівність $|F(x)| < \frac{n!}{2^n}$ може справджуватися не більш ніж для n цілих значень змінної x.

4) Задано многочлен степеня 2014 з цілими коефіцієнтами. Виявляється, що значення цього многочлена в будь-якій цілій точці ділиться на фіксоване просте число p. Доведіть, що $p < 2014$.

5) Дано дійсне число $t \geq 3$ та многочлен $P(x)$ такий, що $\left|P(k) - t^k\right| < 1$ для усіх цілих чисел k від 0 до деякого натурального n. Доведіть, що тоді степінь многочлена $P(x)$ не менший за n.

6) Задані різні натуральні числа $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Позначимо $b_i = (a_i - a_1)(a_i - a_2) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_n)$. Доведіть, що НСК($b_1, \dots\ b_n$) ділиться на $(n-1)!$

7) Нехай f - многочлен із цілими коефіцієнтами, $f(0) = 0, f(1) = 1$. Припустимо, що для деякого простого числа p значення f у цілих точках дають остачу 0 або 1 при діленні на p. Доведіть, що степінь f не менший за p-1.

8) Доведіть, що для фіксованого k сума $1^k + 2^k + \dots + n^k$ є многочленом степеня $k+1$ від змінної n.

Позначимо цей многочлен P_k. Знайдіть $P_{2014}(-\frac{1}{2})$.

Домашнє завдання

1. Многочлен $P(x)$ степеня n такий, що $P(k) = \frac{k}{k+1}$ для усіх цілих чисел k від 0 до деякого натурального n. Знайдіть $P(n+1)$.

2. Дана функція $f(x)$, значення якої для довільного цілого x теж ціле. Відомо, що для довільного простого числа p існує такий многочлен $Q_p(x)$ степеня не більше 2014 з цілими коефіцієнтами, що $f(x) - Q_p(x)$ ділиться на p для будь-якого цілого x. Чи вірно, що існує многочлен $g(x)$ з дійсними коефіцієнтами такий, що $g(n) = f(n)$ для довільного цілого n?

3. Нехай $a, b, c, d \in R$ та $|ax^3 + bx^2 + cx + d| \leq 1$ для усіх $x \in [-1,1]$. Доведіть нерівність $|a| + |b| + |c| + |d| \leq 7$