

Тренувальна олімпіада з геометрії

- 1) Вписане коло трикутника  $ABC$  дотикається до сторін  $AB$  і  $BC$  в точках  $K$  та  $L$ . Бісектриса кута  $A$  перетинає пряму  $KL$  у точці  $M$ . Доведіть, що тоді кут  $AMC$  рівний  $90^\circ$ .
- 2) На висотах  $AA_1, BB_1, CC_1$  (але не на продовженнях висот) гострокутного трикутника  $ABC$  відмітили відмінні від  $H$  (ортоцентра) точки  $A_2, B_2$  та  $C_2$  так, що сума площ трикутників  $ABC_2, AB_2C$  та  $A_2BC$  дорівнює площі трикутника  $ABC$ . Доведіть, що точки  $H, A_2, B_2$  та  $C_2$  лежать на одному колі.
- 3) На дузі  $BC$  описаного кола трикутника  $ABC$  (дуга не містить точку  $A$ ) обирається довільна точка  $P$ . Позначимо  $I_1$  та  $I_2$  інцентри трикутників  $PBA$  та  $PCA$ . Доведіть, що описані кола трикутників  $ABC$  та  $PI_1I_2$  проходять через точку, яка не залежить від вибору  $P$ .
- 4) У трикутнику  $ABC$  кут  $A$  є найменшим. Точки  $B$  і  $C$  ділять коло, описане навколо цього трикутника, на дві дуги. Нехай  $U$  - внутрішня точка тієї дуги з кінцями  $B$  і  $C$ , яка не містить точки  $A$ . Серединні перпендикуляри до відрізків  $AB$  і  $AC$  перетинають пряму  $AU$  у точках  $V$  та  $W$  відповідно. Прямі  $BV$  і  $CW$  перетинаються у точці  $T$ . Доведіть, що  $AU = TB + TC$ .
- 5) Через точки  $A$  та  $B$  провели дві четвірки прямих, які у перетині утворюють 9 чотирикутників. Припустимо, що у три з чотирьох кутових чотирикутників можна вписати кола. Доведіть, що тоді і четвертий кутовий чотирикутник теж описаний.
- 6) Кожне з кіл  $S_1, S_2$  та  $S_3$  дотикається зовнішнім чином кола  $S$  (в точках  $A_1, B_1$  та  $C_1$  відповідно) та двох сторін трикутника  $ABC$  ( $S_1$  дотикається до  $AB$  та  $AC$ ,  $S_2$  – до  $AB$  та  $BC$ ,  $S_3$  - до  $AC$  та  $BC$ ). Доведіть, що прямі  $AA_1, BB_1, CC_1$  перетинаються в одній точці.
- 7) Вписане коло трикутника  $ABC$  дотикається до сторони  $BC$  в точці  $D$ . Розглянемо коло, що проходить через точки  $B$  і  $C$  та дотикається до вписаного кола трикутника  $ABC$  в деякій точці  $E$ . Доведіть, що центр зовні вписаного кола трикутника  $ABC$ , яке дотикається до сторони  $BC$ , лежить на прямій  $DE$ .