

Заняття 13.11.2010, Технічний ліцей, 10-й клас. Функціональні рівняння. Частина 1.

1. Про функцію f відомо, що якщо $x < y$, то $f(x) > f(y)$. Нехай $a < b$. Що більше:
 - а) $f(f(a))$ чи $f(f(b))$?
 - б) $f(f(f(f(f(a))))))$ чи $f(f(f(f(f(b))))))$?
2. Функція f така, що для кожних x та y справджується рівність $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Відомо, що $f(5) = 1$. Знайдіть:
 - а) $f(100)$;
 - б) $f(1)$;
 - в) $f(1/2)$;
 - г) $f(2/3)$.
3. Функція f така, що для довільних додатних x та y справджується рівність $f(xy) = f(x) + f(y)$. Знайдіть $f(2010)$, якщо $f(1/2010) = 1$.
4. Функція f для довільних дійсних чисел x, y задовольняє рівність: $f(x + y) = f(x) + f(y) + 80xy$. Відомо, що $f(1/4) = 2$. Знайдіть:
 - а) $f(1/2)$;
 - б) $f(1)$;
 - в) $f(2/3)$.
5. Знайдіть усі функції f такі, що для будь-яких x та y справджується рівність:
 $f(x - y) = f(x) + f(y) - 2xy$.
6. Функція f при будь-якому x задовольняє рівність: $f(x) + (x + 1/2) \cdot f(1 - x) = 1$.
 - а) Знайдіть $f(0)$ й $f(1)$.
 - б) Знайдіть $f(13)$.
7. Задано правило, яке кожній парі чисел x, y ставить у відповідність деяке число $x * y$, причому для довільних x, y та z справедливі тотожності:
 - 1) $x * x = 0$,
 - 2) $x * (y * z) = (x * y) + z$.Чому дорівнює $2011 * 2010$?