Тренировочная олимпиада

1. На банкете за круглым столом сидит 2015 людей. Каждую секунду они чокаются по таким правилам: за одну секунду любой человек чокнулся не более одного раза, чокаться "наискосок"нельзя. Какое наименьшее число секунд должно пройти пока любая пара сидящих за столом людей не чокнется?

2. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — неотрицательные действительные числа. Докажите неравенство
$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{a_1}{(1+a_1)(1+a_2)} + \frac{a_1 a_2}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)} + \cdots + \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} \leq 1.$$

3. Докажите, что для любых целых чисел a, b больших 2, найдётся последовательность $n_1, n_2, \ldots, n_k$, что $n_1 = a$, $n_k = b$, а $n_i n_{i+1}$ делится на $n_i + n_{i+1}$ для любого i от 1 до $k-1$.

4. Каждой точке на плоскости присвоено какое-то действительное число. Известно, что инцентру любого треугольника отвечает среднее арифметическое чисел, которые стоят в его вершинах. Докажите, что всем точкам отвечает одно и то же число.