

1. Діофантові рівняння

1. Розв'язати рівняння в цілих числах:

i) $x^2 + 1 = 3y$;

ii) $x^2 - 2y^2 + 8z = 3$;

iii) $x^3 + x + 10y = 20004$;

iv) $8x^3 - 13y^3 = 17$;

vii) $x^2 + 5y^4 = 112233$;

viii) $35x^4 + 24y^3 = 100000$;

ix) $x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{14}^4 = 1999$;

x) $-x^2 + 7y + 6 = 0$.

2. Для яких $a \in \mathbb{N}$ існують такі $x, y \in \mathbb{N}$, що $x^2 + y^2 = axy$?

Розв'язати рівняння:

3. $x^2 - 3xy + 2y^2 = 3$ в \mathbb{Z} .

4. $x^3 + y^3 = (x + y)^2$ в \mathbb{Z} .

5. $x^4 + xy^2 - 72 = 0$ в \mathbb{Z} .

6. $x - y^4 = 4$, де $y \in \mathbb{N}$, x — просте.

7. $xy + x^2y^2 - 72 = 0$ в \mathbb{Z} .

8. $x^2 + 3y^2 = 36 - 4xy$ в \mathbb{Z} .

9. $x(x + 1)(x + 7)(x + 8) = y^2$ в \mathbb{N} .

10. $x^3 + (x + 1)^3 + \dots + (x + 7)^3 = y^3$ в \mathbb{Z} .

2. Трохи ірраціональності

1. Довести, що число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ — ірраціональне.

2. Чи обов'язково сума, різниця, добуток, частка двох ірраціональних чисел буде ірраціональним числом?

3. Нерівності

1. Для дійсного a довести нерівність $\frac{a^2 + 3}{\sqrt{a^2 + 2}} > 2$.

2. Для дійсних чисел a, b, c таких, що $a + 2b + 3c \geq 14$, довести нерівність

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 14.$$

3. Для дійсних чисел x, y довести нерівність $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$.

4. Для додатних чисел a, b, c таких, що $a + b + c = 1$, довести нерівність

$$(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 8(1 - a)(1 - b)(1 - c).$$

5. Для додатних чисел $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ довести нерівність

$$\sqrt[3]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3)} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} + \sqrt[3]{b_1 b_2 b_3}.$$