Геометрична каша – 3

0) Розібрати статтю Квант 1992 №9 Протасов «Вокруг теоремы Фейербаха»
   Зробити вправи 3, 6, 8, 9, 14, 13, 16, 21, 22.
1) В трикутнику ABC на стороні AC як на діаметрі побудовано коло. Воно перетинає сторони AB та AC в точках K та L. Нехай M - точка перетину дотичних до кола в цих точках. Довести $BM \perp AC$.
2) (Поризм Штейнера) Якщо існує ланцюг кіл $S_1, S_2, ..., S_n$, кожне з яких дотикається двох сусідніх та двох даних кіл R_1, R_2, то таких ланцюгів нескінченно багато. А точніше, для довільного кола T_1, що дотикається до даних кіл R_1, R_2, існує аналогічний ланцюг з n кіл $T_1, T_2, ...T_n$.
3) На бокових сторонах трапеції $ABCD$ побудовані трикутники ABE та CDF так, що AE паралельно CF та BE паралельно DF. Доведіть, що коли $E \in CD$, то $F \in AB$.
4) Через вершину A трикутника ABC проведені прямі l_1 та l_2 симетричні відносно бісектриси кута A. Доведіть, що проекції точок B, C на l_1 та l_2 відповідно, середина сторони BC та основа висоти опущеної з вершини A лежать на одному колі.
5) На описаному колі трикутника ABC взяті точки A_1, B_1, C_1 так що AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці.При відображенні A_1, B_1, C_1 відносно BC, AC, AB отримали точки A_2, B_2, C_2. Доведіть, що трикутники $A_1B_1C_1$ та $A_2B_2C_2$ подібні.
6) В кути трикутника ABC вписують кола, що попарно дотикаються. Нехай A_1, B_1, C_1 точки дотику цих кіл, що лежать проти відповідних вершин. Доведіть, що відрізки AA_1, BB_1 та CC_1 перетинаються в одній точці.
7) Кола ω_1, ω_2 перетинаються в точках A, B. Виявилося, що центр O кола ω_1 належить колу ω_2. Через точку O проведено пряму , що перетинає AB в точці P та ω_2 - в тоці C. Довести, що P лежить на полярі C.
8) З точки A проведені дотичні AB та AC до кола, та січна, що перетинає коло в точках D та E. M - середина відрізка BC. Доведіть що:
   - $BM^2 = DM * ME$
   - $\angle DME = 2\angle DBE$ *або* $2\angle DCE$
   - $\angle BEM = \angle DEC$.
9) Нехай A_1, B_1, C_1 - точки дотику вписаного кола до відповідних сторін трикутника ABC. З точки M - середини AC - до вписаного кола проведена друга дотична MK. Нехай l - пряма паралельна AC через точку B. Доведіть, що прямі KB_1, l, A_1C_1 перетинаються в одній точці.
10) З точки P, що лежить всередині трикутника ABC, опущено перпендикуляри PA', PB', PC'. На прямі BC, AC, та AB. Знайдіть розташування точки P, при якому сума $\frac{BC}{PA'} + \frac{AC}{PB'} + \frac{AB}{PC'}$ приймає найменше значення.
11) Кожна діагональ опуклого п»ятикутника відтинає від нього трикутник одиничної площі. Обчисліть площу п»ятикутника.
12) На площині дано трикутник ABC. Розглянемо всі можливі пари кіл, що дотикаються до прямої AB в точках A та B та мають спільну хорду. Назвемо цю

хорду PQ. Доведіть, що всі описані кола навколо CPQ мають спільну точку відмінну від C, або мають спільну дотичну в точці C.

13) В опуклому чотирикутнику $ABCD$ виконано $AB = BC$ та $AD = DC$. На сторонах AB та AD вибрано точки E та F відповідно , таким чином, що B, E, F, D на одному колі. На відрізках DE та BF побудовані як на основах рівнобедренні трикутники DPE та BQF ., так що DPE подібний ADC, а BQF подібний ABC та вони однаково орієнтовані. Доведіть, що точки P, Q, A лежать на одній прямій.
14) Вписаний чотирикутник $ABCD$ описаний навколо кола з центром I. Діагоналі чотирикутника перетинаються в точці P. Довести $\frac{AP}{CP} = \frac{AI^2}{CI^2}$.
15) Чи можна весь **простір** розрізати на **кола** ненульового радіусу, що не мають спільних точок.