L Всеукраїнська олімпіада 2009-2010 років
Умови та розв'язки по усіх класах

Другий день

8 клас

5. (**Рубльов Б., Торба С.**) У різних вершинах рівностороннього трикутника зі стороною 1 знаходяться три бігуни: Перший, Другий та Третій. Вони одночасно починають рухатись вздовж сторін в одному напрямі (Другий в напрямі Першого, Третій – в напрямі Другого, Першій – в напрямі Третього). Чи обов'язково зустрінуться у якійсь момент в одній точці усі три бігуни одночасно, якщо:

   а) швидкості Першого, Другого та Третього відповідно дорівнюють 2008, 2009 та 2010?

   б) вони рухаються з різними швидкостями, кожна з яких є натуральним числом?

   Відповідь: ***а)*** обов'язково; ***б)*** не обов'язково.

   Розв'язання. ***а)*** Запишемо умову зустрічі бігунів у одній точці: $2008t = 2010t + 1 - 3m = 2009t + 2 - 3n$, де $m, n \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}$. Звільнимось у цих рівняннях від дійсного параметру t і одержимо: $t = 3n - 2$ або $2t = 6n - 4$. Також маємо $2t = 3m - 1 \Rightarrow 3m - 1 = 6n - 4 \Leftrightarrow m = 2n - 1$, звідки шукані розв'язки легко знаходяться, наприклад, при $m = n = 1$ і , маємо $t = 1$. Простою підстановкою переконуємось, що дійсно через час $t = 1$ Перший пробіжить 2008, Другий – 2009 (на 1 більше, тобто як раз дожене Першого), Третій – 2010 і дожене Першого та Другого.

   б) Нехай швидкості Першого, Другого та Третього відповідно 1, 2 та 4. Тоді умову зустрічі у одній точці можна записати таким чином: $t = 4t + 1 - 3m = 2t + 2 - 3n$, $m, n \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}$. Тоді $t = 3n - 2$ та $3t = 3m - 1$. Звідси маємо таке рівняння у цілих числах: $9n - 6 = 3m - 1$, яке очевидно не має розв'язків, тобто три одночасно не зустрінуться.

6. (**Рубльов Богдан**) Знайдіть найменше натуральне число n таке, що будь-яке з чисел $1, 2, \ldots, 10$ може буде подане як цифра або як сума кількох цифр десяткового запису числа n, що стоять поруч.

   Відповідь: 11134.

   Розв'язання. Зрозуміло, що трицифровим це число бути не може. Припустимо, що воно має чотири цифри: $\overline{abcd}$, тоді усього можна побудувати 10 різних комбінацій сум сусідніх цифр: $a, b, c, d, a+b, b+c, c+d, a+b+c, b+c+d, a+b+c+d$. Для виконання умов задачі усі ці 10 значень повинні бути різними. Таким чином усі цифри різні та їх сума 10, оскільки цифра 0 у нашому числі просто зайва, то єдиною можливою комбінацією цифр є 1, 2, 3, 4. Але для того, щоб одержати у сумі число 9, цифра 1 повинна стояти на краю, аналогічно для одержання у сумі цифри 8 на краю повинна бути також цифра 2. Таким чином, з точністю до порядку (прямого чи зворотного) можливі числа 1342 або 1432. Але для першого числа неможна одержати суму 5, для другого – 6.

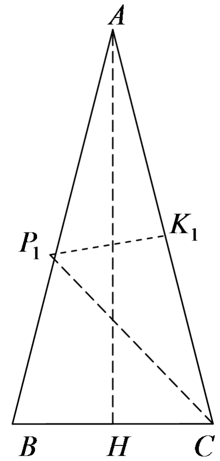
   Таким чином число щонайменше п'ятицифрове. Воно не може починатись з 1111, оскільки для одержання суми 10 нам треба мати одне з чисел 11116, 11117, 11118, 11119, а з цих чисел не можна представити число 5. Так само початок 1112 задає такі числа – 11125, 11126, 11127, 11128, 11129 (щоб сума цифр була не меншою від 10).

Але тоді не можна представити число 5 (крім другого числа) та 6 для другого числа. Таким чином для мінімального числа початок повинен бути щонайменше 1113. Числа 11131, 11132, 11133 очевидно не дають у сумі 10, а число 11134 задовольняє умови, а тому є за доведенням мінімальним.

7. (**<u>Ясінський В'ячеслав</u>**) Нехай a і b – такі натуральні числа, що

$$a \cdot (a,b) + b \cdot [a,b] = a^2 + b^2,$$

де через (a,b) та $[a,b]$ позначені відповідно найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне чисел a,b. Знайдіть $\left(2010^a - 1,\, 2010^b - 1\right)$.



<u>Рис.7</u>

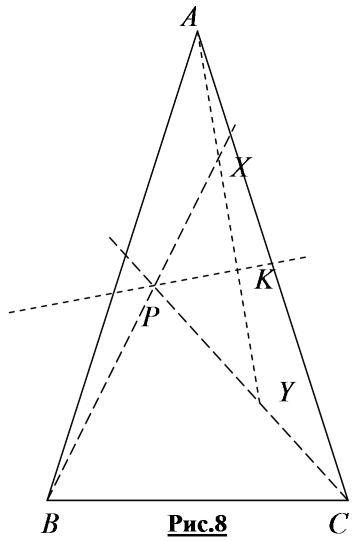
<u>Відповідь:</u> $2010^a - 1$.

<u>Розв'язання.</u> Нехай $(a,b) = d$, тоді $a = dx$ і $b = dy$, де x та y – взаємно прості натуральні числа. Оскільки $[a,b] = \frac{ab}{(a,b)} = dxy$, то задана рівність перепишеться так $d^2x + d^2xy^2 = d^2x^2 + d^2y^2$, тобто $x + xy^2 = x^2 + y^2$. Звідки $(x-1)(x-y^2) = 0$, тобто $x = 1$ або $x = y^2$. Оскільки x і y – взаємно прості числа, то друга рівність дає $x = 1$, $y = 1$. В обох випадках $x = 1$, а це означає, що $b = ay$, де y – деяке натуральне число. У цьому випадку, матимемо

$$2010^b - 1 = (2010^a)^y - 1 = (2010^a - 1)\left((2010^a)^{y-1} + (2010^a)^{y-2} + \ldots + 2010^a + 1\right) \vdots\, 2010^a - 1.$$

Тому $\left(2010^a - 1,\, 2010^b - 1\right) = 2010^a - 1$.

8. (**<u>Сердюк Назар</u>**) Всередині рівнобедреного трикутника ABC з основою BC та гострим кутом при вершині відмічена точка P така, що $\angle BPC = 2\angle BAC$. Нехай K – основа перпендикуляра, опущеного з A на пряму, якій належить бісектриса кута, суміжного з кутом $\angle BPC$. Доведіть, що $BP + PC = 2AK$.



<u>Рис.8</u>

<u>Розв'язання.</u> Спочатку покажемо, що точка K завжди розташована всередині $\triangle ABC$. Розглянемо випадок, коли точка $P = P_1$ лежить на стороні AB, тоді послідовно обчислимо кути. Нехай $\angle BAC = \alpha$ (рис.7), тоді $\angle BP_1C = 2\alpha$, $\angle ABC = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, $\angle BCP_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{3\alpha}{2} \Rightarrow \angle P_1CA = \alpha$, таким чином $\triangle ACP_1$ – рівнобедрений, тому висота P_1K_1 є бісектрисою, тому точка $K = K_1$ належить стороні AC. Тому при розташуванні точки P всередині $\triangle ABC$ бісектриса PK зовнішнього кута $\angle BPC$ має менший кут з прямою BC. Тому й перпендикуляр з вершини A на цю пряму розташований між сторонами AB та AC трикутника ABC.

Продовжимо перпендикуляр AK до перетину з прямою CP (рис.8) (без обмеження загальності розгляду задачі, будемо вважати, що точка P ближче до точки B ніж до C). Так само пряма BP перетинається з прямою AK у точці X. Тоді у $\triangle PXY$ відрізок PK – одночасно висота та бісектриса, тому він рівнобедрений, тобто $\angle PXY = \angle PYX$, звідки $\angle BXA = \angle AYC$. Якщо тепер позначимо $x = \angle XBA$, $y = \angle YCA$, $x_1 = \angle CAY$, $y_1 = \angle BAX$, тоді $x_1 + y_1 = \alpha$, $\pi - \alpha = x + y + \angle PBC + \angle PCB = x + y + \pi - 2\alpha$ $\Rightarrow x + y = \alpha = x_1 + y_1$, крім того $x + y_1 = y + x_1$. З останніх двох рівностей маємо $x = x_1$, $y = y_1$. Таким чином $\triangle ABX = \triangle CAY$ за стороною та двома кутами.

Далі маємо такі рівності: $2AK = AX + AY = CY + BX = CY + BP + PX = CY + YP + BP = CP + BP$, що й треба було довести.

9 клас

5. Яку максимальну кількість вершин може мати опуклий багатокутник, у якого усі кути вимірюються цілим числом градусів?

   Відповідь: 360.

   Розв'язання. Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180°(n-2)$, максимальний кут, який визначається цілим числом градусів – це $179°$. Таким чином ми можемо записати співвідношення $180°(n-2) \le 179°n \Rightarrow n \le 360$. Зрозуміло, що $n = 360$ – це найбільше можливе значення. Це, наприклад, досягається у правильному 360-кутнику. Можна міркувати таким чином: сума зовнішніх кутів дорівнює $360°$, і кожний зовнішній кут не менше $1°$, таким чином може бути не більше 360 таких кутів. Це, наприклад, досягається у правильному 360-кутнику.

6. (**Зуб Володимир**) Навколо гострокутного трикутника ABC описане коло. Хорда AD є бісектрисою кута трикутника та перетинає сторону BC у точці L, хорда DK перпендикулярна до його сторони AC і перетинає її в точці M. Знайдіть відношення $\frac{AM}{MC}$, якщо $\frac{BL}{LC} = \frac{1}{2}$.

   Відповідь: $\frac{AM}{MC} = 3$.

   Розв'язання. За властивістю бісектриси $\frac{BL}{AB} = \frac{LC}{AC} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{LC}{BL}$, або $\frac{AC}{AB} = 2$, тобто $AC = 2AB$ (рис.9). Оскільки $\angle BAD = \angle DAC$ (AD – бісектриса $\angle BAC$), то ці кути спираються на рівні дуги, тобто $BD = DC$. Розглянемо S – середину відрізку AC. Тоді $AS = SC = AB$.

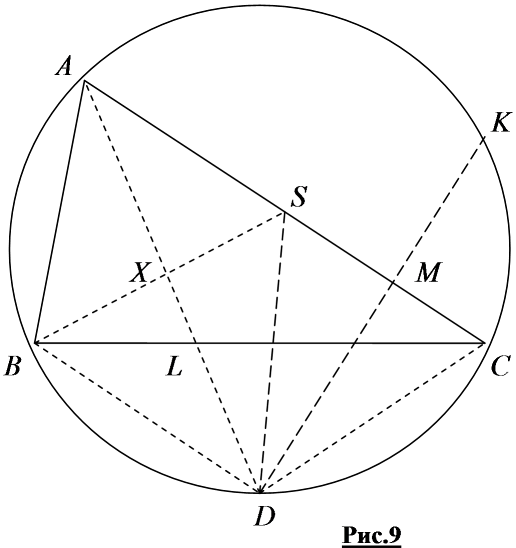


Рис.9

Тоді $\triangle BAD = \triangle SAD$ за двома сторонами та кутом між ними. Звідси випливає, що $BD = DS$. А тоді $DC = BD = DS$.

Отже, трикутник $\triangle SDC$ – рівнобедрений з основою SC. Тоді його висота DM є одночасно і медіаною. Отже, $MC = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AC = \frac{1}{4}AC$. Тоді $AM = AC - MC = AC - \frac{1}{4}AC = \frac{3}{4}AC$. Отже, $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{\frac{3}{4}AC}{\frac{1}{4}AC} = 3$.
Зауваження: Оскільки в гострокутному трикутнику ABC $AC = 2AB$, то кут $\angle ACB$ не більше $30°$ (рис.10). Це значить, що перпендикуляр з точки D на пряму AC перетинає її у внутрішній точці відрізку AC.

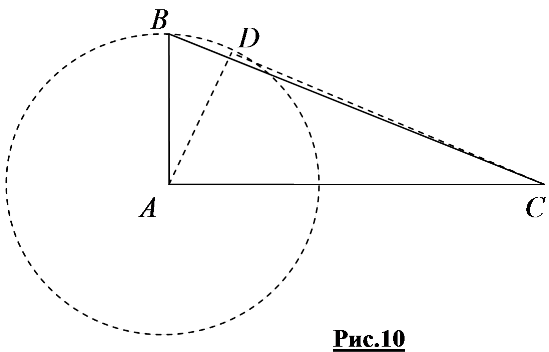


Рис.10

7. (**Безверхнєв Ярослав**) Куб складається з n^3 одиничних кубиків. Пряму, що проходить через центри рівно n одиничних кубиків назвемо "цікавою". Чи існує таке значення $n > 1$, при якому кількість цікавих прямих є степенем числа 2?

   Відповідь: шуканого кубика не існує.

   Розв'язання. Для кубика стороною n загальна кількість різних "цікавих" прямих буде дорівнювати $3n^2 + 6n + 4$. Це можна або безпосередньо обчислити, врахувавши, що "цікаві" прямі можуть бути трьох напрямів: паралельно ребру, паралельно діагоналі грані, діагональ усього кубика. Або застосувати такий підхід. Наліпимо на даний кубик шар кубиків товщиною в один кубик, таким чином отримавши новий кубик з розмірами $(n+2)\times(n+2)\times(n+2)$. Зауважимо, що кожна цікава пряма проходить через центри рівно двох "наліплених" кубиків, інакше вона б повністю належала зовнішньому шару. Причому через заданий "наліплений" кубик проходить рівно одна цікава пряма. Таким чином, кожна цікава пряма відповідає єдиній парі "наліплених" кубиків, а тому кількість цікавих прямих буде дорівнювати половині кількості "наліплених" кубиків, а саме $\frac{1}{2}\left((n+2)^3-n^3\right)=3n^2+6n+4$.

Тепер треба з'ясувати, чи існують натуральні розв'язки рівняння $3n^2+6n+4=2^l$. Позначимо $m=n+1$ і перепишемо його у такому вигляді: $3m^2+1=2^l$. Тепер розглянемо це рівняння за модулем 8. При $l\geq 3$ права частина кратна 8, а ліва частина на 8 не ділиться, оскільки дає остачі $1,4,5$ при діленні на 8. Таким чином залишається лише розглянути випадки $l=1$ та $l=2$.

При $l=1$ маємо $3m^2+1=2$ – немає натуральних розв'язків.

При $l=2$ маємо $3m^2+1=4$ – має натуральний розв'язок $m=1$, але тоді $n=0$, що суперечить умові.

Таким чином шуканого кубика не існує.

8. (**Сенін Віталій**) Дійсні числа $a_1,a_2,\ldots,a_n$ задовольняють умови $a_1+a_2+\ldots+a_n=n$ та $a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_n\geq 0$. Доведіть, що справджується нерівність:

$$na_1\geq a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2.$$

Розв'язання. Доведення випливає з таких перетворень: $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\leq a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+a_1(a_1-a_1)+a_2(a_1-a_2)+a_3(a_1-a_3)+\ldots+a_n(a_1-a_n)=a_1(a_1+a_2+\ldots+a_n)=na_1$, що й треба було довести.

10 клас

5. (**Рубльов Богдан**) Розв'яжіть рівняння $\sin\frac{\pi\sqrt{x}}{4}+\cos\frac{\pi\sqrt{2-x}}{4}=\sqrt{2}$.

Відповідь: $x=1$.

Розв'язання. ОДЗ лівої частини нашого рівняння $x\in[0,2]$, при таких x обидві функції $\sin\frac{\pi\sqrt{x}}{4}$ та $\cos\frac{\pi\sqrt{2-x}}{4}$ є зростаючими, а тому сума також функція зростаюча. Звідси зрозуміло, що якщо рівняння має розв'язок, то він єдиний. Простим підбором знаходимо, що $x=1$ є розв'язком, а тому він шуканий.

6. (**Мисак Данило**) Знайдіть найменше натуральне число k, для якого існує такий набір з 2010 попарно різних натуральних чисел, що добуток будь-яких k чисел цього набору ділиться націло на добуток решти $2010-k$ чисел набору.

Відповідь: $k=1006$.

Розв'язання. З одного боку, k не може бути меншим, ніж 1006: інакше добуток k найменших чисел довільного набору буде меншим за добуток решти $2010-k\geq k$ чисел (усі множники у першому добутку будуть меншими за множники другого). З іншого боку, можна показати приклад набору, що задовольняє умову із $k=1006$.

Нехай $p_1,p_2,\ldots,p_{2010}$ — 2010 довільних попарно різних простих чисел і $a_i=p_1p_2\ldots p_{i-1}p_{i+1}\ldots p_{2010}=\frac{p_1p_2\ldots p_{2010}}{p_i}$. Тоді добуток 1006 чисел $a_{n_1},a_{n_2},\ldots,a_{n_{1006}}$ дорівнює $\dfrac{(p_1p_2\ldots p_{2010})^{1006}}{p_{n_1}p_{n_2}\ldots p_{n_{1006}}}=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_{2010}^{\alpha_{2010}}$, де степінь α_i кожного простого числа $p_i, 1\leq i\leq 2010$, дорівнює 1005 або 1006, тобто не менший ніж 1005. Аналогічно, добуток решти 1004 чисел можна подати як $p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_{2010}^{\beta_{2010}}$, де кожен степінь $\beta_i, 1\leq i\leq 2010$, дорівнює 1003 або 1004, тобто не перевищує 1004. Зрозуміло, що в такому випадку перший добуток ділиться на другий. Насамкінець, якщо $i \neq j$, то $a_i = \frac{p_1 p_2 \dots p_{2010}}{p_i} \neq \frac{p_1 p_2 \dots p_{2010}}{p_j} = a_j$, тож числа набору $\{a_i\}$ попарно різні.

7. (**Нагель Ігор**) На сторонах AB і BC трикутника ABC вибрали точки K і M відповідно так, що $AK = KM = MC$. Нехай N – точка перетину прямих AM і CK, P – основа перпендикуляра, опущеного з точки N на пряму KM, а Q – така точка відрізка KM, що $MQ = KP$. Доведіть, що вписане коло трикутника KMB дотикається сторони KM у точці Q.

Розв'язання. Нехай I – центр вписаного кола трикутника KMB. Тоді KI і MI – бісектриси $\angle BKM$ і $\angle BMK$ відповідно. Оскільки, за умовою задачі, трикутники AKM і CMK – рівнобедрені, то $\angle KAM = \angle KMA = \angle MKI = \angle BKI$ і $\angle MKC = \angle MCK = \angle KMI = \angle BMI$, причому ці кути гострі (рис.11). Це означає, що точка P належить відрізку KM. Так як $\angle IKM = \angle KMA$ і $\angle IMK = \angle MKC$, то $KI \parallel AM$ і $MI \parallel CK$, тобто чотирикутник $KIMN$ – паралелограм. Оскільки протилежні сторони паралелограма рівні, то $KN = IM$. Так як $KP = MQ$ (за умовою), то трикутники PKN і QMI рівні (за двома сторонами і кутом між ними). З рівності цих трикутників випливає, що $\angle IQM = \angle NPK = 90°$. А це означає, що Q – точка дотику, що і треба було довести.

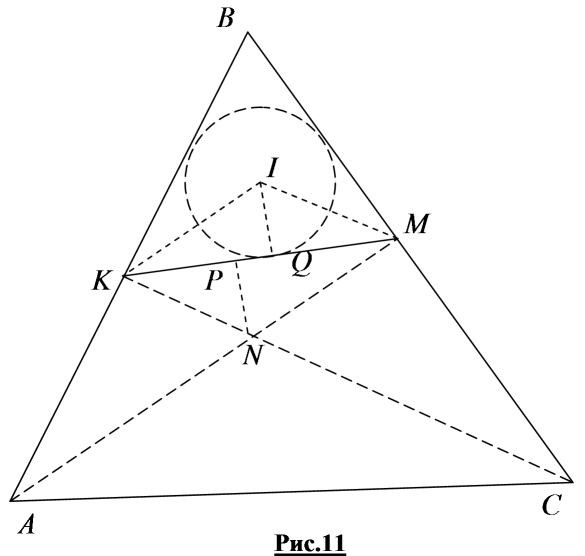


Рис.11

Розв'язання. **(Анікушин Андрій).** В рівнобедрених трикутниках AKM та KMC проведемо висоти KR та MS. Нехай прямі KR і MS перетинаються в точці T. Тоді в трикутнику TKM, прямі KS і MR є висотами, а отже N – ортоцентр TKM. Отже, TN – це також висота. Оскільки $NP \perp KM$ за умовою, то T, N, P – лежать на одній прямій. Оскільки трикутники AKM та KMC рівнобедрені, то KT і MT – бісектриси зовнішніх кутів BKM. Тому T – центр зовнівписаного кола, а P – точка дотику зовнівписаного кола до сторони KM. Отже, $BK + KP = BM + MP$, звідки $KB - MB + KP = PM$. Далі $KB - MB + KM = KB - MB + (KP + PM) = 2PM$. Тобто $KQ = PM = \frac{1}{2}(KB - MB + KM)$ звідки і випливає потрібне твердження.

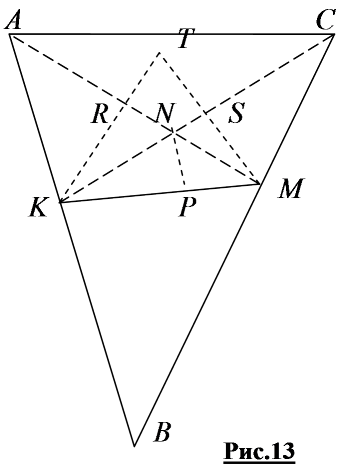


Рис.13

8. (**Майзліш О., Примак А.**) Яке найменше значення може приймати вираз

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2,$$

якщо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – попарно різні цілі числа.

Відповідь: $4n - 6$.

Розв'язання. Доведемо методом математичної індукції, що

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2 \geq 4n - 6,$$

якщо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – попарно різні цілі числа.

База індукції очевидна. Дійсно, $S_2 = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_1)^2 \geq 2$, оскільки усі числа цілі та різні.

Тепер нехай твердження справджується для деякого n, тобто

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2 \geq 4n - 6.$$

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ – попарно різні цілі числа. Оскільки цей вираз циклічний, то можемо вважати, що x_{n+1} – найбільше з даних чисел. Враховуючи, що x_1, x_n, x_{n+1} – цілі та попарно різні, отримуємо

$$(x_n - x_{n+1})^2 + (x_{n+1} - x_1)^2 - (x_n - x_1)^2 = (x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - x_1) \geq 4.$$

Додаючи цю нерівність до припущення індукції, отримаємо потрібне твердження для $n + 1$.

Залишається навести приклади таких чисел, для яких в доведеній нерівності буде виконуватись рівність.

Для непарного $n = 2k - 1$ можна покласти $x_j = 2j - 2$ при $j \leq k$ та $x_j = -2j + 4k - 1$ при $j \geq k + 1$.

Для парного $n = 2k$ можна покласти $x_j = 2j - 2$ при $j \leq k$ та $x_j = -2j + 4k + 1$ при $j \geq k + 1$.

<u>Розв'язання</u>. **(Анікушин Андрій).** Нехай серед чисел $x_1, \ldots, x_n$ найбільше x_1, а найменше x_k. Тоді ясно, що $x_1 - x_k \geq n - 1$. За нерівністю між середнім квадратичним та середнім арифметичним маємо:

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j+1})^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - x_{j+1}|\right)^2 \geq$$

$$\geq \frac{((x_1 - x_2) + \ldots + (x_{k-1} - x_k) + (-x_k + x_{k+1}) + (-x_{k+1} + x_{k+1}) + \ldots + (-x_n + x_1))^2}{n} =$$

$$= \frac{(2(x_1 - x_k))^2}{n} \geq \frac{(2(n-1))^2}{n} = 4n - 8 + \frac{4}{n}.$$

Оскільки $\sum\limits_{j=1}^{n} (x_j - x_{j+1})^2$ – натуральне, то $\sum\limits_{j=1}^{n} (x_j - x_{j+1})^2 \geq 4n - 7$. Більше того, оскільки при піднесенні до квадрату парність не змінюэться, а $\sum\limits_{j=1}^{n} (x_j - x_{j+1}) = 0$ – парне, то і $\sum\limits_{j=1}^{n} (x_j - x_{k+1})^2$ також парне. А тому, воно не менше ніж $4n - 6$.

<u>11 клас</u>

5. (**Рубльов Богдан**) Для якого найменшого натурального числа N можна замість знаків $''*''$ у виразі $1 * 2 * 3 * \ldots * N$ поставити знаки $''+''$ та $''-''$ таким чином, щоб одержати значення виразу рівним:

а) 2010; ***б)*** 2011?

<u>Відповідь</u>: ***а)*** $N = 63$; ***б)*** $N = 65$.

<u>Розв'язання</u>. а) При усіх знаках + маємо такі нерівності: $1 + 2 + 3 + \ldots + 62 = 1953 < 2010$, $1 + 2 + 3 + \ldots + 63 = 2016 > 2011$. Таким чином $N \geq 63$. Легко показати, що тут відповідь $N = 63$, для цього достатньо розставити знаки таким чином – перед числом 3 поставити $''-''$, а решта знаків – це $''+''$, тоді $-3\cdot 2+1+2+3+\ldots+62+63 = 2016-6 = 2010$.

б) Тут для $N = 63$ нічого не виходить, оскільки зміна знаку перед будь-яким числом не змінює парності значення виразу. Оскільки сума $1+2+3+\ldots+63 = 2016$ є парним числом, то зміна будь-яких знаків залишить значення виразу парним. Більше того, якщо до цього виразу ще додати один доданок, то це буде парне число 64, а тому вираз все одно залишиться парним і не дасть значення 2011. Таким чином, щонайменше треба $N = 65$. А тепер вже знаки розставити доволі легко. Оскільки $1+2+3+\ldots+65 = 2145$, то $-2\cdot(2+65)+1+2+3+\ldots+65 = 2145-134 = 2011$.

6. (**Богданський Віктор**) В опуклому чотирикутнику $ABCD$ кути $\angle ABC$ та $\angle BCD$ не менші від $120°$. Доведіть, що $AC + BD > AB + BC + CD$.

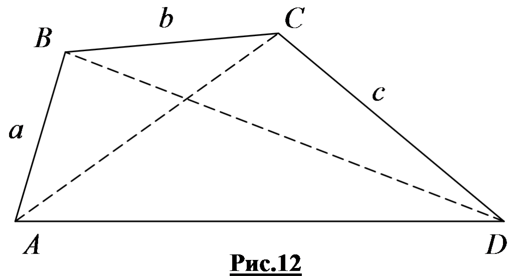


Рис.12

Розв'язання. Нехай $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ (рис.12). Тоді $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle B \geq a^2 + ab + b^2$. Аналогічно $BD^2 \geq b^2 + bc + c^2 \Rightarrow AC + BD \geq \sqrt{a^2+ab+b^2} + \sqrt{b^2+bc+c^2}$. Оскільки $\sqrt{a^2+ab+b^2} > a+\frac{1}{2}b$ і $\sqrt{b^2+bc+c^2} > c+\frac{1}{2}b$, то $AC + BD > a+b+c = AB+BC+CA$.

7. (**Петровський Дмитро**) Знайдіть усі такі функції $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, що

1) для довільних цілих чисел x, y $f(x + f(x+2y)) = f(2x) + f(2y)$;

2) $f(0) = 2$.

Відповідь: $f(k) = k + 2$.

Розв'язання. Підставимо $x = 0$ та $y = 0 \Rightarrow$

$$f(f(2y)) = f(2y) + 2, \tag{1}$$

$$f(x + f(x)) = f(2x) + 2, \tag{2}$$

Доведемо індукцією по n, що $f(2n) = 2n+2$. База, при $n = 0$ – вже доведена. З припущення, що $f(2n) = 2n+2$ треба показати, що справджується рівність: $f(2n+2) = 2n+4$.

При $n = 2m$ треба показати, що $f(4m+2) = 4m+4$. Підставимо $x = 2m$ в (2): одержимо

$$f(2m + f(2m)) = f(2m+2m+2) = f(4m+2) = f(4m)+2 = 4m+4.$$

При $n = 2m-1$ $f(4m) = 4m+2$. Підставимо $y = 2m-1$ в (1):

$$f(f(4m-2)) = f(4m) = f(4m-2)+2 = 4m+2.$$

Повністю аналогічно ця рівність доводиться для від'ємних n, звідки для усіх цілих n одержимо $f(2n) = 2n+2$. Нехай k – непарне, підставимо у вихідне співвідношення $x = 2z+k$, $y = -z$, $z \in \mathbb{Z}$, тоді

$$f(2z+k+f(k)) = f(4z+2k) + f(-2) = 4z+2k+2-2z+2 = 2z+2k+4, \tag{3}$$

Розглянемо випадки. $f(k)$ – парне. Тоді підставимо в (3): $z = -\frac{f(k)}{2}$, тоді $f(k) = -f(k)+2k+4$, звідки $f(k) = k+2$ – непарне, тобто одержали суперечність. $f(k)$ – непарне. Тоді $2z+k+f(k)$ – парне, а тому $f(2z+k+f(k)) = 2z+k+f(k)+2$. З урахуванням (3) маємо $f(2z+k+f(k)) = 2z+k+f(k)+2 = 2z+2k+4$, звідки остаточно одержуємо, що $f(k) = k+2$, $k \in \mathbb{Z}$.

8. (**Лішунов В., Рубльов Б.**) Числа $1, 2, \ldots, n$ у деякому порядку розставлені в ряд. З ними дозволяється робити таку операцію: беруть довільні дві пари сусідніх елементів, які не мають спільних членів та міняють ці пари місцями. Чи завжди можна за скінченну кількість таких операцій одержати монотонний (зростаючий або спадний) набір чисел, якщо:

а) $n = 2009$; ***б)*** $n = 2010$?

Відповідь: ***а)*** не завжди; ***б)*** завжди.

Розв'язання. Якщо розглянути 5 сусідніх елементів, то з комбінації 12345 послідовно можна одержати такі:

$$12345 \to 14523 \to 23514 \to 51234 \to 53412 \to 12453. \tag{4}$$

Тобто останні три елементи були циклічно переставлені, тому аналогічно можна одержати й трійку 12534. Якщо зробити симетричні перестановки, то так само ми можемо переставити циклічно й три перші елементи п'ятірки:

$$12345 \to 34125 \to 25134 \to 23451 \to 45231 \to 31245. \tag{5}$$

Розглянемо деякі чотири позиції всередині списку, наприклад з номерами 1001–1004. На числа з такими значеннями поки що не зважаємо і послідовно розставляємо на свої місця числа з номерами $1, 2, 3, \ldots, 1000$. Як це можна зробити показано нижче на прикладі числа 500. Припускаємо, що числа 1–499 вже зайняли своє позиції. Більше ми їх для перестановок не чіпаємо. Якщо 500 стоїть поруч справа від 499, тобто на своїй позиції, то все зроблене. Якщо 500 стоїть останнім n-м номером, то міняємо місцями пари, які займають позиції з номерами $(n-3, n-2)$ та $(n-1, n)$ і 500 вже займає не останню позицію. Якщо 500 стоїть через одну позицію від 499, тобто на 501-му місці, то спочатку робимо заміну пар, які займають такі номери: (500,501) та (502,503). Тепер нехай вже 500 займає деяку позицію $k \in \{502, 503, \ldots, n-1\}$, тоді ми робимо заміну пар з такими номерами: (500,501) та $(k, k+1)$ і число 500 займає свою позицію. Таким чином ми розставимо на свої місця усі числа 1–1000. Після цього, аналогічно симетрично переставимо на свої місця числа $1005 - n$. Таким чином ми завжди зможемо одержати таку розстановку:

$$1, 2, \ldots, 1000, a, b, c, d, 1005, 1006, \ldots, n,$$

де набір (a, b, c, d) є деякою перестановкою чисел $(1001, 1002, 1003, 1004)$. Подивимось, які перестановки (a, b, c, d) ми зможемо одержати. Усього їх 24. Якщо розглянути п'ятірку $(1000, a, b, c, d)$, то шляхом використання схеми (4) одержимо ще такі: $(1000, a, c, d, b)$ та $(1000, a, d, b, c)$. Якщо до одержаних четвірок (a, b, c, d), (a, c, d, b) та (a, d, b, c) додати справа число 1005, та застосувати схему (5), ми одержимо такі перестановки: (b, c, a, d), (c, a, b, d), (c, d, a, b), (d, a, c, b), (d, b, a, c), (b, a, d, c). Знову застосувавши схему (4) до деяких з одержаних маємо ще 3 варіанти, які можна одержати: b, d, c, a, c, b, d, a та d, c, b, a. Тобто 12 з 24 ми одержати змогли. Покажемо, що при спробі розставити числа саме у зростаючому порядку інші 12 позицій досягнути неможливо.

Для довільної розстановки чисел $1, 2, \ldots, n$ назвемо інверсією випадок, коли більше число стоїть лівіше за менше, наприклад позиція з 5 чисел 23514 має інверсії: (2,1), (3,1), (5,1) та (5,4). Назвемо кількість таких інверсій "інваріантом позиції". Покажемо, що після виконання будь-якої дозволеної операції інваріант позиції змінюється на число, яке кратне 2. Припустимо, що ми поміняли числа (a, b) та (c, d), які займали позиції $(k, k+1)$ та $(l, l+1)$, $k < l$. Тоді після перестановки не змінюється кількість інверсій, до яких причіпні числа, що розташовані на позиціях $1, 2, \ldots, (k-1)$ та $(l+2), (l+3), \ldots, n$. Тобто, якщо інверсія була, то вона й залишиться, й навпаки, якщо вона не утворювалася, то вона й не з'явиться. Кількість інверсій, у яких задіяні числа на позиціях $(k+2), (k+3), \ldots, (l-1)$ не зміниться по відношенню одне одного. Але якщо розглянути деяке число e, що займає одну вказаних позицій, то по відношенню до кожного з чисел тих пар (a, b) та (c, d), які переставляються вона зміниться. І змінюється це обов'язково з 0 на 1, чи навпаки, з 1 на 0. Якщо спочатку була інверсія між числами, наприклад, a і e (тобто у загальний інваріант позиції додавалась від цієї пари 1), то після перестановки інверсія зникає (у загальну суму додається 0) і навпаки. Таким чином загальна кількість змін буде парною, тому й парність інваріанту позиції не зміниться. Ну я що стосується чисел a, b, c, d, то між a і b, та c і d нічого не зміниться, а між усіма іншими парами (їх 4) так само усе міняється на протилежне, а тому й парність суми інверсій не змінюється.

Таким чином зрозуміло, що ми не зможемо з позиції $1, 2, 3, 4, \ldots, n$ (інваріант якої 0) перейти у позицію $2, 1, 3, 4, 5, \ldots, n$ (інваріант 1). Тобто одержати всередині з перестановки a, b, c, d решту 12 інших перестановок ми не зможемо.

Але усе це стосувалося лише спроби розставити числа за зростанням. Повністю аналогічно можна спробувати їх розставити за спаданням. Як ми бачимо усі позиції розбилися на дві великі групи позицій, з парним та непарним інваріантом, які не можна перетворити одна в іншу. Обчислимо інваріант такої позиції: $n, n-1, n-2, \ldots, 3, 2, 1$. Тут кожна пара чисел утворює інверсію, а тому й їх загальна кількість $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Якщо це число парне, то обидві монотонні позиції знаходяться в одній половині, тобто їх можна перетворити одна в іншу, але не усі позиції можна одержати з них. Якщо ж навпаки, це число непарне, то будь-яка початкова позиція у відповідності з її інваріантом може бути перетвореною або у зростаючу, або у спадну послідовність. Таким чином залишається з'ясувати парність числа $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Оскільки n та $n-1$ різної парності, то це число буде парним, якщо одне з цих чисел є кратним 4, тобто при $n = 4m$ або $n = 4m+1$, інакше воно непарне. Таким чином, при $n = 2009 \equiv 1 \pmod 4$ не усі позиції можна перетворити одна у іншу. А при $n = 2010 \equiv 2 \pmod 4$ навпаки, з кожної позиції такими перестановками можна одержати або зростаючий, або спадний набір заданих чисел.