# Комбінаторика

Богдан Ківва 30bohdan@gmail.com

1) Таблиця $n*n$ заповнена числами $1, 2, 3, ..., n^2$. Доведіть, що знайдуться 2 сусідні клітинки, в яких записані числа, що відрізняються принаймні на $n$.
2) Будемо казати, що множина $S$ вільна від сум, якщо для довільних $x, y \in S$ виконано $x + y \notin S$. Доведіть, що довільна множина з $n$ ненульових цілих чисел містить підмножину з щонайменше $n/3$ елементів вільну від сум.
3) (Задача Ердьоша) Нехай $r, s$ - натуральні. Доведіть, що довільна послідовність з $rs+1$ різних чисел містить спадаючу підпослідовність довжини $r+1$ або зростаючу підпослідовність довжини $s+1$.
4) В графі з $4k$ вершинами $3k$ ребер. Відомо, що серед довільних $2k$ вершин знайдуться 2 з'єднані ребром. Довести, що вершини можна розбити на 2 групи по $2k$ вершин так, що ніякі 2 вершини з різних груп не з'єднані ребром.
5) Розглянемо граф на $n$ вершинах з $m$ ребрами. Відомо, що в графі немає цикла на 4 вершинах. Довести, що $e \le \frac{n + \sqrt{4n^3 - 3n^2}}{4}$.
6) Юля і Вітя подорожують по архіпелагу з 2013 островів, де деякі острова зв'язані двосторонніми маршрутами катера. Вони грають в гру. Спочатку Юля обирає острів на який вони прилітають. Після цього вони подорожують на катерах по черзі обираючи острів на якому ще не були (Першим обирає Вітя). Хто не зможе обрати острів, той програв. Доведіть, що при довільній схемі маршрутів Юля може виграти.
7) В кожній клітинці таблиці 1000*1000 стоїть 0 або 1. Довести, що можна або викреслити 990 рядків так, що в довільному стовпчику буде принаймні 1 невикреслена одиниця, або викреслити 990 стовпчиків, що в довільному рядку буде хоча б 1 невикреслений нуль.
8) Чи існує нескінченне слово з літер 1 та 0 таке, що ніякий блок в ньому не зустрічається 3 рази підряд. (блок – декілька послідовних літер).
9) В кожній цілочисельній точці площини $(x, y)$, де $y \le 0$ стоїть фішка. За 1 крок дозволяється перестрибнути однією фішкою через сусідню на порожню клітинку і при цьому забрати ту, через яку перестрибували. Чи може за скінченну кількість кроків в точці $(x, y)$, $y \ge 5$ опинитися фішка?
10) Для натуральних $m, n$ позначимо через $f(m, n)$ кількість послідовностей $(x_1, x_2, ..., x_n)$ з $n$ цілих чисел, для яких виконано $|x_1| + |x_2| + ... + |x_n| \le m$. Доведіть, що $f(m, n) = f(n, m)$.
11) Нехай $n \ge 3$ - натуральне. Задано правильний $(n+1)$-кутник вписаний в коло. Розглянемо всі способи нумерації вершин числами $0, 1, ..., n$. Нумерації, які можна сумістити поворотом вважаються однаковими. Назвемо нумерацію чудовою, якщо для довільних номерів $a < b < c < d$, що $a + d = b + c$, хорда, що з'єднує вершини з номерами $a, d$ не пертинає хорду, що з'єднує вершини з номерами $b, c$. Нехай $M$ - кількість чудових нумерацій. Нехай $N$ - кількість впорядкованих пар $(x, y)$ натуральних чисел, що $x + y \le n$ і НСД$(x, y) = 1$. Довести, $M = N + 1$.