Задавальник зима 2017/2018

1. Доказать, что полный комплект домино можно выложить по правилам домино.
2. *«Лемма о хороводах».* В некоторой компании каждый человек имеет ровно двух друзей. Докажите, что если все друзья возьмутся за руки, то они образуют один или несколько хороводов.
3. В стране больше 101 города. Столица соединена авиалиниями со 100 городами, а каждый город, кроме столицы, соединён ровно с десятью городами (авиалиния действует в обе стороны). Известно, что из любого города можно попасть в любой другой (может быть, с пересадками). Доказать, что можно закрыть половину авиалиний, идущих из столицы, так что возможность попасть из любого города в любой сохранится.
4. В стране из каждого города выходит по 3 железные дороги. Две компании хотят их все приватизировать. Антимонопольный комитет требует, чтобы из каждого города выходили дороги обеих компаний. Доказать, что компании могут договориться между собой, чтобы требование Антимонопольного комитета было выполнено.
5. Дан связный граф G с k рёбрами. Доказать, что можно занумеровать рёбра всеми числами 1, 2, …, k так, что для каждой вершины степени не меньшей двух, набор чисел, которыми помечены рёбра из этой вершины, имеет НОД, равный 1.
6. В турнире по футболу, проведённому среди 20 команд из разных городов, каждая команда провела одну встречу дома и не более двух встреч на выезде. Докажите, что можно было составить расписание игр так, чтобы каждая команда играла не более одной игры в день и весь турнир прошёл бы за три дня.
7. В городе N с любой станции метро можно проехать на любую другую (возможно, с пересадками). Докажите, что одну из станций метро можно закрыть на ремонт без права проезда через неё так, чтобы с любой из оставшихся станций можно было проехать на любую другую.
8. Докажите, что в любом связном графе можно удалить вершину вместе со всеми выходящими из неё рёбрами так, чтобы он остался связным.
9. На планете 1000 городов, среди которых есть столицы государств. Некоторые города связаны дорогами так, что любая дорога соединяет ровно два города, и от любого города до любого другого можно добраться по дорогам. При этом, чтобы попасть из одной столицы в другую, нужно проехать не менее 21 дороги. Докажите, что на планете не больше 90 столиц.
10. В группе из нескольких человек некоторые люди знакомы друг с другом, а некоторые – нет. Каждый вечер один из них устраивает ужин для всех своих знакомых и знакомит их друг с другом. После того как каждый человек устроил хотя бы один ужин, оказалось, что какие-то два человека всё ещё не знакомы. Докажите, что на следующем ужине им познакомиться тоже не удастся.
11. В некоторой группе людей у каждого есть один враг и один друг. Докажите, что этих людей можно разбить на две компании так, что в каждой компании не будет ни врагов, ни друзей.
12. На плоскости даны 1997 точек. Двое по очереди соединяют эти точки отрезками, причем один отрезок нельзя проводить дважды. Проигрывает тот, после хода которого впервые образуется замкнутая ломаная с нечетным числом звеньев. Кто выиграет при правильной игре?
13. На окружности взяли 10 точек. Какое наибольшее число отрезков с концами в этих точках можно провести так, чтобы никакие три из этих отрезков не образовывали треугольник с вершинами в этих точках?
14. В классе 12 девочек и 12 мальчиков, все – разного роста. На уроке физкультуры их построили в две шеренги (одна – позади другой): мальчиков – по росту слева направо, а девочек – по росту справа налево. Затем из каждой пары мальчик-девочка вызвали более высокого. Докажите, что вызвали двенадцать самых высоких учеников.
15. Дано два кола T_1, T_2, які перетинаютья в двох точках A і B. Коло T_2 проходить через цент кола T_1. Дотична до кола T_2, проведена через точку B, перетинає коло T_1 у точці C (віддмінній від B). Доведіть, що $AB = BC$.
16. Дано множину з 2n додатних чисел, про які відомо відомо: ці числа можна розбити на n пар таким чином, що сума чисел у кожній парі буде одна і та сама; ці 2n чисел можна розбити на n пар(можливо, вже іншим способом) так, що добуток чисел у кожній парі буде одним і тим самим. Доведіть, що серед цієї множини не знайдеться трьох різних.

17. Двоє гарають у подвійні шахи, тобто всі фігури ходять як і в звичайних шахах, але кожен із шахістів робить по два ходи підряд. Доведіть, що шахіст,який грає білими шахами, може грати так, щоб не програти(тобто другий не має виграшної стратегії).
18. Натуральні числа a, b такі, що $\frac{a+1}{a}+\frac{b+1}{b}$ - ціле. Нехай c - найбільший спільний дільник чисел a, b. Доведіть, що $c^2 \leq a+b$.
19. Доведіть, що для довільних дійсних чисел a, b виконується нерівність $\frac{a^4+a^2b^2+b^2}{3} \geq \frac{a^3b+ab^3}{2}$
20. Надруковано мільйон квитків з номерами від 000000 до 999999. Квиток з номером $\overline{abcdef}$ вважається «щасливим», якщо $af+be+cd=100$. Доведіть, що сума номерів всіх «щасливих» квитків ділиться на 1001.
21. У саду діда Панаса ростуть груші та яблуні таким чином, що для кожної яблоні знайдуться деякі дві груші на відстані 10 м від неї. Чи може яблунь у садку бути більше, ніж груш?
22. Нехай AE - бісектриса трикутника ABC, аочка D належить його стороні AC, причому $\angle DBC = \angle BAC + \angle BCA$. Доведіть, що DE – бісектриса кута BDC.
23. На Марсі 2000 країн, причому серед будь-яких чотирьох з них принаймні одна країна ворогує з рештою країн цієї ж четвірки. Знайдіть найменшу можливу кількість країн Марсу, що ворогують з усіма країнами.
24. Через точки дотику вписаного у трикутник кола зі сторонами цього трикутника провели прямі, що відповідно паралельні бісектрисам протилежних кутів трикутника. Доведіть, що проведені прямі перетинаються в одній точці.
25. На дошці з клітинками розмірами 4x4 двоє учнів грають у гру. Вони ходять по черзі, і кожен гравець своїм ходом зафарбовує одну клітинку, яку можна зафарбувати лише один раз. Переможеним вважатиметься той гравець, після ходу якого утвориться квадрат розмірами 2x2, що складатиметьмя із зафарбоваих клітинок. Хто з гравців може забезпечити собі виграш: хто перший чи його суперник?
26. Дано трапецію ABCD з основами AD і BC. Відомо, що бісекриса кута ABC перетинає середню лінію цієї трапеції в точці P, о основу AD – у точці Q. Знайдіть величину кута APQ.
27. Дано 1999 чисел. Відомо, що сума будь-яких дев'яносто дев'яти з цих чисел є додатною. Доведіть, що додатною є сума всіх даних чисел.
28. Микола та Сергійко грають у гру, по черзі записуючи цілі числа в кілтинки таблиці 7x9(7 рядків і 9 стовпчиків).Першим робить свій хід Миколка. За один хід записується одне число у вільну клітинку. Гра продовжується, поки вони не заповнять числами усю таблицю. Потім підраховують значення $S_1,...,S_7$ - суми чисел у рядках таблиці. Якщо серед чисел $S_1,...,S_7$ парних більше, ніж непарних, виграє Миколка. В іншому випадку – Сергійко. Хто з гравців може забезпечити собі виграш?
29. На сторонах AB, BC, CD, DA квадрата ABCD вибрали точки M, P, n, Q відповідно так, що відрізки MN і PQ перпендикулярні. Нехай O – точка перетину відрізків MN і PQ/ Доведіть, що $P_{AMOQ}+P_{CPON}=P_{BMOP}+P_{DNOQ}$, де P_F - периметр фігури F.
30. Доведіть, що центри квадратів побудованих на сторонах довільного паралелограма, є вершинами деякого квадрату.
31. За допомогою циркуля та лінійки поділіть кут 35 на 7 рівних частин.
32. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC на бічній стороні BC обрану точку K так, що $\angle BAK = 24$. На відрізку AK обрано точку M так, що $\angle ABM = 90,\ AM = 2BK$. Знайдіть величини всіх кутів трикутника ABC.
33. На куб із воску сілі спочити декілька бджіл(їх можна вважати точками) . З'ясувалося, що на всіх гранях кількість бджіл різна. Знайдіть найменшу кількість бджіл, які могли спочивати на кубі.
34. На шахівниці розміром 11x11 білих на одну більше, ніж чорних На чорних клітинках стоять 11 тур. Доведіть, що серед них є дві тури, які б'ють одна одну.
35. На бічних сторонах AB і BC рівнобедреного трикутника ABC , у якому $\angle B = 20$, вибрали відповідно точки D і E так, що $AD = BE = AC$. Знайдіть величину кута BDE.
36. Скількома різними способами з цифр від 1 до 9 можна утворити три трицифрові числа, так, щоб сума найбільшого і найменщого з цих чисел була найбільшою можливою?
37. Дано опуклий шестикутник, у якоговсі кути рівні. Доведіть, що модулі різниць довжин його протилежних кутів рівні.
38. На сторонах трикутника ABC (кут B - тупий) зовні його побудовані рівносторонні трикутники $A_1BC,\ AB_1C,\ ABC_1$. Нехай B_2, C_2 - такі точки, що $ABC_1B_2,\ ACB_1C_2$ - ромби. Доведіть, що пряма AA_1 ділить відрізок B_2C_2 навпіл.