Відбір міста Києва на Всеукраїнську олімпіаду 2010-2011 рр

I тур

Умови та розв'язки по усіх класах

8 клас

1. У тенісному турнірі в одне коло (кожний з кожним грають рівно по 1 разу) грали n тенісистів, позначимо через w_i та l_i – кількість перемог та поразок відповідно i-го учасника (нічиїх у тенісі не буває). Доведіть, що виконується рівність:

$$w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_n^2 = l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2.$$

Розв'язання. Оскільки кожен з гравців зіграв рівно $n-1$ гру, то маємо таку рівність: $l_i = n - 1 - w_i$, а усього ігор було зіграно $\frac{n(n-1)}{2}$, тобто $w_1 + w_2 + \ldots + w_n = \frac{n(n-1)}{2}$. Тепер можемо записати такі рівності:

$$l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2 = (n-1-w_1)^2 + (n-1-w_2)^2 + \ldots + (n-1-w_n)^2 =$$

$$= n\cdot(n-1)^2 - 2(n-1)(w_1 + w_2 + \ldots + w_n) + (w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_n^2) =$$

$$= n\cdot(n-1)^2 - 2(n-1)\cdot\frac{n(n-1)}{2} + (w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_n^2) = w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_n^2,$$

що й треба було довести.

2. Заданий прямокутник $ABCD$ зі сторонами $AB = a$ та $BC = b$, O – точка перетину діагоналей. На промені BA за точку A відкладений відрізок $AE = AO$, а на промені DB за точку B відкладений відрізок $BZ = BO$. Відомо, що трикутник EZC рівносторонній. Доведіть, що:

а) $AZ = EO$; **б)** $EO \perp ZD$.

Розв'язання. **а)** За трьома сторонами $\triangle EAC = \triangle ZOC$, звідси ми маємо

$$\angle EAC = \angle ZOC \Leftrightarrow 180^\circ - \angle BAO = 180^\circ - \angle AOB \Leftrightarrow \angle BAO = \angle AOB,$$

звідси випливає, що $\triangle ABO$ рівносторонній.

За двома сторонами $AO = OB$, $OZ = EB$ та кутом між ними $\angle ZOA = 60^\circ = \angle EBO$ маємо рівність трикутників $\triangle AZO$ та $\triangle OEB$. Тому $AZ = EO$.

б) Оскільки $AO = AE = AB$, то медіана OA $\triangle OEB$ дорівнює половині сторони BE, тому цей трикутник прямокутний з прямим кутом BOE, звідси й випливає, що $EO \perp ZD$.

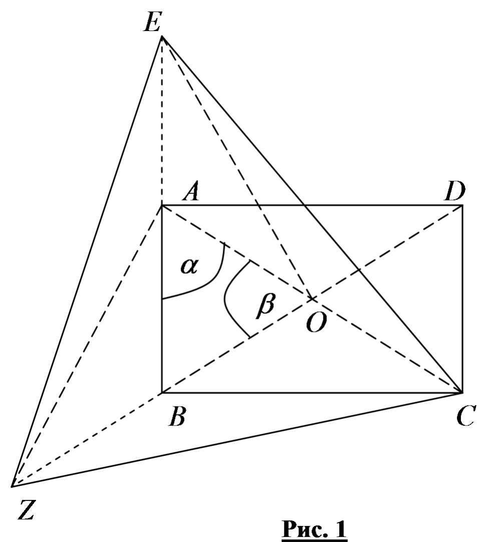

Рис. 1

3. Скільки існує різних упорядкованих шісток натуральних чисел (a, b, c, d, e, f), для яких виконуються умови: $a > b > c > d > e > f$ та $a+f = b+e = c+d = 22$?

Відповідь: 120.

Розв'язання. Якщо обрати число $n \in \{1, 2, \ldots, 10\}$, то пара (m, n), яка задовольняє умови $m > n$ та $m+n = 22$ визначається однозначно. Таких пар усього існує рівно 10. Фактично залишається знайти скільки існує відповідних трійок (d, e, f), для яких виконуються умова: $10 \geq d > e > f \geq 1$. Очевидно, що ця кількість дорівнює $C_{10}^3 = 120$.

4. а) Нехай a, b – натуральні числа, для яких число $M(a,b) = a - \frac{1}{b} + b\left(b + \frac{3}{a}\right)$ також ціле. Доведіть, що число $M(a,b)$ – квадрат цілого числа.

б) Чи існують ненульові цілі c, d, для яких число $M(c, d)$ є натуральним, але не дорівнює квадрату цілого числа?

Відповідь: **б)** існують.

Розв'язання. **а)** Оскільки $a + b^2$ – ціле, тому $\frac{3b}{a} - \frac{1}{b}$ також ціле. Тобто цілим є число $\frac{3b^2-a}{ab}$, тобто ab – дільник числа $3b^2 - a$, зокрема й b – дільник числа $3b^2 - a$, тому $a \vdots b$, але це означає, що $ab \vdots b^2 \Rightarrow 3b^2 - a \vdots b^2 \Rightarrow a \vdots b^2$. Таким чином можемо написати, що $a = mb^2$, але тоді $3b^2 - mb^2 \vdots mb^3$, звідки випливає, що $3 - m \vdots mb$, звідки випливає, що m дільник числа 3, а b – дільник числа $3 - m$. Розглянемо можливі випадки.

$m = 3$, тоді $a = 3b^2$ та $M(a, b) = 3b^2 - \frac{1}{b} + b^2 + \frac{1}{b} = 4b^2$ – твердження справджується.

$m = 1$, тоді $2 \vdots b$, тобто $b = 1$ або $b = 2$. При $b = 1$ $a = mb^2 = 1$, а при $b = 2$ $a = 4$, тепер вже неважко обчислити, що $M(1, 1) = 4$ та $M(4, 2) = 9$, тобто умова виконується.

б) Існують, наприклад, покладемо $c = 4, d = -2$, тоді $M(4, -2) = 7$, що й треба було показати.

9 клас

1. Додатні числа a, b, x, y, z задовольняють умови $a + b = 3$ та $xyz = 1$. Доведіть, що справджується нерівність:

$$(ax + b)(ay + b)(az + b) \geq 27.$$

При яких значеннях змінних має місце рівність?

Відповідь: рівність можлива при $x = y = z = 1$.

Розв'язання. Після розкриття усіх дужок достатньо довести таку нерівність:

$$a^3xyz + a^2b(xy + yz + zx) + ab^2(x + y + z) + b^3 \geq 27.$$

З умови $xyz = 1$ маємо, що

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3, \qquad (1)$$

$$xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{xyyzzx} = 3. \qquad (2)$$

Тоді

$$a^3xyz + a^2b(xy + yz + zx) + ab^2(x + y + z) + b^3 \geq a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3 = 27,$$

що й треба було довести.

Рівність можлива, якщо у нерівностях (1) та (2) виконуються рівності, а це можливе лише за умов $x = y = z = 1$.

2. Задача 8-2.

3. Позначимо через N кількість упорядкованих п'ятірок $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ натуральних чисел, які задовольняють умову:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} = 1.$$

З'ясуйте, парним чи непарним є число N.

Якщо п'ятірка чисел упорядкована, такі набори вважаються різними: $(1, 2, 3, 4, 5)$ та $(2, 1, 3, 4, 5)$.

Відповідь: N – непарне.

Розв'язання. Нехай п'ятірка $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ задовольняє задану умову, тоді п'ятірка $(a_2, a_1, a_3, a_4, a_5)$ також умову задовольняє. Якщо $a_1 \neq a_2$, то це різні упорядковані п'ятірки, тому їх кількість парна, таким чином для з'ясування парності числа N достатньо дослідити упорядковані п'ятірки, у яких $a_1 = a_2$. Так само парна кількість п'ятірок при $a_3 \neq a_4$, тому достатньо розглянути випадок $a_3 = a_4$. З аналогічних міркувань, якщо розглянути п'ятірки $(a_1, a_1, a_3, a_3, a_5)$ та $(a_3, a_3, a_1, a_1, a_5)$, то при $a_1 \neq a_3$ – їх парна кількість, тому можемо вважати, що $a_1 = a_3$.

Таким чином залишається розглянути лише такі п'ятірки (a, a, a, a, b), де a та b можуть бути рівними. Із заданої умови $\frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1$ маємо, що $4b + a = ab$ або $(a-4)(b-1) = 4$. Звідси $b-1$ натуральний дільник числа 4, тобто b може дорівнювати 2, 3 або 5. Знаходячи відповідне a, можемо виписати усі розв'язки (a, b): $(8, 2)$, $(6, 3)$, $(5, 5)$. Їх кількість непарна, а тому і число N так само непарне.

4. Задача 8-4.

10 клас

1. Задача 9-1.

2. У трикутнику ABC, у якого $AB \neq AC$, проведена висота AD. Точки E та F – відповідно середини відрізків AD та BC. Точка G – основа перпендикуляра, що опущений з точки B на пряму AF. Доведіть, що пряма EF дотикається до кола, що описане навколо $\triangle CGF$, у точці F.

Розв'язання. Позначимо через H – середину відрізку BG, тоді $FH \parallel CG$ як середня лінія. Оскільки $\triangle BFG \sim \triangle AFD$, як прямокутні з рівним гострим кутом (рис.3), то також і $\triangle HFG \sim \triangle EFD$, звідси рівними є кути $\angle EFD = \angle HFG = \angle FGC$, з рівності крайніх кутів у наведений рівності випливає, що пряма EF – дотична, бо вони повинні спиратись на спільну дугу кола FC.

3. Задача 9-3.

4. Нехай прості числа p, q пов'язані рівністю $q = 2p+1$. Доведіть, що існує натуральне число, яке кратне числу q та має суму цифр, що не перевищує 3.

Розв'язання. Зазначимо, що для числа $5 = 2\cdot 2+1$ це справджується, оскільки шукане число 10. нехай в подальшому $(10, q) = 1$. З малої теореми Ферма випливає, що

$$10^{q-1} - 1 \,\vdots\, q \qquad \Leftrightarrow \qquad 10^{2p} - 1 \,\vdots\, q,$$

а це рівносильне тому, що на q ділиться один з множників $10^p - 1$ або $10^p + 1$. Якщо цим числом є $10^p + 1$, то твердження доведене, оскільки його сума цифр дорівнює 2. Залишилось розглянути другу можливість, тобто $10^p - 1 \,\vdots\, q$.

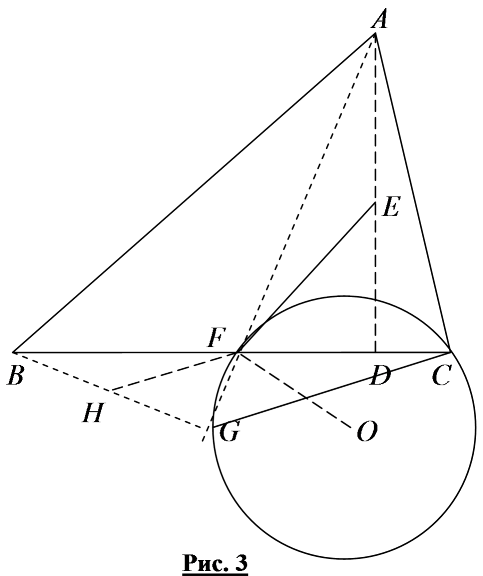

Рис. 3

Позначимо через d найменше натуральне число, для якого $10^d \equiv 1 \pmod q$, тоді $p \,\vdots\, d$. Оскільки p – просте, то можливі значення для d – це 1 або p.

Якщо $d = 1$, то $10^1 - 1 \,\vdots\, q$, тобто $q = 3$, що не задовольняє умови.

Якщо $d = p$, то це означає, що $1, 10, 10^2, \ldots, 10^{p-1}$ мають різні остачі при діленні на q. Нехай множина A – це усі ці остачі чисел $1, 10, 10^2, \ldots, 10^{p-1}$ при діленні на q, а також число 0. Множина B – це остачі чисел $-1 - 10^k$ за модулем q при $0 \leq k < p$, а також число $q-1$. Оскільки 10^k не дає остачу 0 за модулем q, то кількість елементів кожної з множин A та B дорівнює $p+1$, якщо сюди додати що кількість елементів у об'єднанні множин $A \cup B$ не перевищує $q = 2p+1$, то звідси випливає, що перетин цих множин не порожній, тобто існують такі цілі невід'ємні r, s, що $10^r \equiv -1 - 10^s \pmod q$, звідки випливає, що шукане число $10^r + 10^s + 1$, яке задовольняє умову, або $10^r \equiv -1 \pmod q$, тоді умову задовольняє число $10^r + 1$, або $0 \equiv -1 - 10^s \pmod q$, і шукане число $10^s + 1$, що й треба було довести.

<u>11 клас</u>

1. Визначити найбільшу підмножину $M \subseteq \mathbb{R}$ таку, що нерівність

$$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \geqslant \sqrt{a+b} + \sqrt{c+d}$$

справджується для усіх $a, b, c, d \in M$. А чи справджуватиметься нерівність

$$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \geqslant \sqrt{a+c} + \sqrt{b+d}$$

для усіх $a, b, c, d \in M$?

<u>Розв'язання</u>. Нехай дана нерівність справджується для усіх значень a, b, c і d із множини M, тоді вона повинна виконуватися і для $a = b = c = d \in M$. З цього маємо, що всі елементи множини М невід'ємні та $2\sqrt{a^2} \geqslant 2\sqrt{2a}$, а це еквівалентно до $a^2 \geqslant 2a \Leftrightarrow a(a-2) \geqslant 0$. Оскільки a – невід'ємне, то маємо, що $a \geqslant 2$, звідки $M \subseteq [2, \infty)$. Якщо a і b є елементами множини $[2, \infty)$, то

$$(a-1)(b-1) \geqslant 1 \Leftrightarrow ab \geqslant a+b \Leftrightarrow \sqrt{ab} \geqslant \sqrt{a+b}.$$

Аналогічно, для чисел c і d із множини $[2, \infty)$ бачимо, що $\sqrt{cd} \geqslant \sqrt{c+d}$. Тому якщо $a, b, c, d \in [2, \infty)$, то $\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \geqslant \sqrt{a+b} + \sqrt{c+d}$. Отже, $M = [2, \infty)$. Доведемо тепер нерівність $\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \geqslant \sqrt{a+c} + \sqrt{b+d}$. Вона еквівалентна наступній

$$ab + cd + 2\sqrt{abcd} \geqslant a + b + c + d + 2\sqrt{(a+c)(b+d)}.$$

Але ми знаємо, що $ab \geqslant a+b$, $cd \geqslant c+d$, $ac \geqslant a+c$, $bd \geqslant b+d$, звідки й випливає потрібне.

2. Задача 10-2.

3. Для якого мінімального натурального k існують множина A, що складається рівно з k дійсних чисел, та попарно різні дійсні числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2010}$, які задовольняють умову: усі числа $x_1 + x_2$, $x_2 + x_3$, $\ldots$, $x_{2009} + x_{2010}$, $x_{2010} + x_1$ належать множині A?

<u>Відповідь</u>: $k = 3$.

<u>Розв'язання</u>. Позначимо значення $m_1 = x_1 + x_2$, $m_2 = x_2 + x_3$, $\ldots$, $m_{2009} = x_{2009} + x_{2010}$, $m_{2010} = x_{2010} + x_1$. Тоді $m_1 \neq m_2$, бо інакше $x_1 = x_3$, що суперечить умові. Так само $m_i \neq m_{i+1}$ для усіх $i = \overline{1, 2010}$ (тут зрозуміло, що $m_{2011} = m_1$).

Звідси вже очевидно, що $k \geq 2$.

Якщо припустити, що мінімальне значення $k = 2$, тобто $A = \{a, b\}$, $a \neq b$, то

$$x_1 + x_2 = a, x_2 + x_3 = b, x_3 + x_4 = a, \ldots, x_{2009} + x_{2010} = a, x_{2010} + x_1 = b.$$

Але тоді

$$1005a = (x_1+x_2)+(x_3+x_4)+\ldots+(x_{2009}+x_{2010}) = (x_2+x_3)+(x_4+x_5)+\ldots+(x_{2010}+x_1) = 1005b.$$

Звідси $a = b$ – суперечність.

Для $k = 3$ побудуємо шуканий приклад: $x_{2k-1} = k$, $x_{2k} = 2011 - k$, $k \geq 1$. Тоді

$x_i + x_{i+1} = 2011$, якщо i – непарне;

$x_i + x_{i+1} = 2012$, якщо i – парне та менше від 2010;

$x_{2010} + x_1 = 1007$, якщо $i = 2010$.

Тобто множина A містить рівно 3 різні елементи, що й треба було показати.

4. Задача 10-4.