

## Математичний бій 4, середня ліга, група В

1. У клітинках головної діагоналі дошки  $2010 \times 2010$  розставлені 2010 фішок. За один хід Настя може обрати будь-які дві фішки і пересунути кожну з них на сусіднє по горизонталі або вертикалі вільне поле. Чи можна через декілька ходів пересунути всі фішки у лівий стовпчик?

2. Нехай  $AF$  – медіана  $\triangle ABC$ , точка  $D$  – середина відрізка  $AF$ , нехай  $E$  – точка перетину прямої  $CD$  та сторони  $AB$ . Виявилось, що  $BD = BF = CF$ . Доведіть, що  $AE = DE$ .

3. Натуральні числа  $m$  і  $n$  такі, що  $2^m + 3^n$  ділиться на 5. Доведіть, що  $2^n + 3^m$  ділиться на 5.

4. Кожну грань кубика поділили на 4 рівних квадрати і розфарбували ці квадрати в 3 кольори таким чином, щоб квадрати, що мають одну спільну сторону, були розфарбовані у різні кольори. Доведіть, що в кожний колір пофарбовані по 8 квадратиків.

5. Колоду карточек з числами від 1 до 78 дають глядачеві. Той її перемішує, відбирає 40 карток, віддає їх першому фокуснику, а інші залишає собі. Перший фокусник відбирає з отриманих карток дві і повертає їх глядачеві. Глядач додає до цих карток одну з своїх тридцяти восьми, і, після перемішування, віддає ці три картки другому фокуснику. Другий фокусник показує, яка з цих карток була обрана глядачем. Запропонуйте, як міг бути показан цей фокус.

6. Доведіть, що для будь-яких  $x_1, x_2, \dots, x_n$  справджується нерівність:

$$x_1(1 - x_1) + (x_2 - x_1)(1 - x_2) + (x_3 - x_2)(1 - x_3) + \dots + (x_n - x_{n-1})(1 - x_n) < \frac{1}{2}.$$

7. Три кола  $S_1, S_2$  та  $S_3$  дотикаються один до одного зовнішнім чином:  $S_1$  та  $S_2$  – в точці  $A$ ,  $S_2$  та  $S_3$  – в точці  $B$ ,  $S_1$  та  $S_3$  – в точці  $C$ . Прямі  $BC$  та  $BA$  другий раз перетинають  $S_1$  в точках  $M$  та  $N$  відповідно. Доведіть, що  $MN$  – діаметр кола  $S_1$ .

8. Є набір натуральних чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  серед яких можуть бути рівні. Позначимо через  $f_k$  кількість чисел цього набору які не менші за  $k$ . Доведіть, що  $f_1 + f_2 + \dots = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ .

9. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2y^2 + x^2y + xy^2 + xy + x + y + 3 = 0, \\ x^2y + xy + 1 = 0. \end{cases}$$

10. Чому дорівнює сума всіх чисел від 1 до 239, у котрих сума цифр парна?