Вівторок, 8 липня 2014 р.

Задача 1. Нехай $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$ — нескінченна послідовність цілих додатніх чисел. Доведіть, що існує єдине ціле число $n \geqslant 1$ таке, що

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n} \leqslant a_{n+1}.$$

Задача 2. Нехай $n \geqslant 2$ — ціле число. Задана шахівниця $n \times n$, яка складається з n^2 одиничних клітинок. Розстановка n тур в клітинках шахівниці називається *мирною*, якщо в кожному горизонтальному і в кожному вертикальному ряду знаходиться рівно по одній турі. Знайдіть найбільше ціле додатнє k таке, що для кожної мирної розстановки n тур знайдеться клітчастий квадрат $k \times k$, у жодній із k^2 клітинок якого немає тури.

Задача 3. Заданий опуклий чотирикутник $ABCD$, у якому $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. Точка H — основа перпендикуляра, опущеного з точки A на пряму BD. Точки S і T вибрані на відрізках AB і AD відподвідно так, що точка H знаходиться всередині трикутника SCT і виконуються рівності

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°\,.$$

Доведіть, що пряма BD дотикається до кола, описаного навколо трикутника TSH.

Час виконання: 4 години 30 хвилин
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Середа, 9 липня 2014 р.

Задача 4. Точки P і Q вибрані на стороні BC гострокутного трикутника ABC так, що $\angle PAB = \angle BCA$ і $\angle CAQ = \angle ABC$. Точки M і N вибрані на променях AP і AQ відповідно так, що P — середина відрізка AM, а Q — середина відрізка AN. Доведіть, що прямі BM і CN перетинаються на колі, описаному навколо трикутника ABC.

Задача 5. Банк Кейптауна випускає монети номіналом $\frac{1}{n}$ для кожного цілого додатнього числа n. Заданий скінченний набір таких монет, сума номіналів яких не перевищує $99 + \frac{1}{2}$ (номінали монет не обов'язково різні). Доведіть, що всі монети можна розбити на 100 або меншу кількість груп так, щоб сума номіналів монет у кожній групі не перевищувала 1.

Задача 6. Будемо казати, що прямі на площині є прямими *загального положення*, якщо жодні дві з них не паралельні і жодні три з них не проходять через одну точку. Довільні декілька прямих загального положення розбивають площину на частини; *обмеженими* частинами розбиття будемо називати ті з них, які мають скінченну площу. Доведіть, що для достатньо велеких значень n справджується таке твердження: у кожній множині з n прямих загального положення на площині можна пофарбувати не менше $\sqrt{n}$ прямих у синій колір так, щоб межа кожної обмеженої частини розбиття не була повністю синьою.

Зауваження: за доведення твердження задачі, в якому $\sqrt{n}$ замінено на $c\sqrt{n}$, будуть нараховуватися бали, в залежності від костанти c.