Проективні теореми в задачах

Літній математичний табір "Контора π"
Старша група

Згадаймо проективні теореми: Паскаля, Бріаншона, Дезарга, Паппа. Також важливим фактом є теорема Монжа.

Теорема 1 (Паскаль). *Нехай є шість точок A, B, C, D, E, F на колі в будь-якому порядку. Тоді точки перетину прямих AB і DE, BC і EF, CD і FA колінеарні.*

Теорема 2 (Дезарг). *Нехай дано два трикутники. Тоді, якщо точки перетину продовжень відповідних сторін колінеарні, то прямі, що проходять через відповідні вершини конкуррентні, і навпаки.*

Теорема 3 (Монж). *Для будь-яких трьох кіл на площині точки перетину трьох пар їх зовнішніх дотичних лежать на одній прямій.*

Вправа 1. *Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло ω. Доведіть, що точки перетину прямих AB та CD, BC та AD і дотичних до ω в B та D лежать на одній прямій.*

Задача 1. *(Піввписане коло) Коло ω дотикається до сторін трикутника ABC AB та AC в точках P та Q відповідно, а також до його описаного кола в R. Доведіть, що центр вписаного кола ABC належить прямій PQ.*

Задача 2. *В прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) відмічені середини сторін BC та CA — M, N. Бісектриси кутів A та B перетинають вдруге описане коло ABC в точках Q та P . Прямі AQ та BC перетинаються в K, прямі PB та AC — в L. Доведіть, що прямі NQ, MP та KL перетинаються в одній точці.*

Задача 3. *На стороні квадрата BC вибрали точку M. Нехай X, Y, Z — центри вписаних кіл трикутників ABM, MCD та AMD відповідно. Нехай H_x, H_y, H_z — ортоцентри трикутників AXB, CYD, AZD. Доведіть, що точки H_x, H_y, H_z лежать на одній прямій.*

Задача 4. *Дано три попарно неперетинні кола з центрами в O_1, O_2, O_3. Іх спільні внутрішні дотичні перетинаються в точках A_1, A_2, A_3. (Спільні дотичні кіл з центрами в O_1 та O_2 перетинаються в точці A_3, аналогічно визначаються A_1, A_2). Доведіть, що прямі A_1O_1, A_2O_2 та A_3O_3 перетинаються в одній точці.*

Задача 5. *Всередині трикутника ABC вибрано точку X таку, що $AX \cdot BC = BX \cdot AC = CX \cdot AB$. Нехай I_1, I_2, I_3 — інцентри трикутників BCX, ACX та ABX відповідно. Доведіть, що прямі AI_1, BI_2 та CI_3 перетинаються в одній точці.*

Задача 6. *Кола ω_1, ω_2 та ω_3 дотикаються внутрішнім чином до кола ω в точках A_0, B_0 і C_0 та між собою не перетинаються. Позначимо l_1 зовнішню дотичну ω_2 та ω_3 таку, що ω_2 та ω_3 в різних півплощинах відносно неї. Аналогічно визначимо l_2 та l_3. Прямі l_1 та l_2 перетинаються в точці C_1. Аналогічно визначаються точки B_1 та C_1. Доведіть, що прямі A_0A_1, B_0B_1 та C_0C_1 перетинаються в одній точці.*

Хілько Данило
dkhilko@ukr.net