Кількість варіантів

Сердюк Назар, nsaann@gmail.com

1. Нехай $a_1, a_2, \cdots, a_n$ – перестановка чисел $1, 2, \cdots, n$. Для $1 \le k \le n$, нехай $F_k = \{a_i | a_i < a_k, i > k\}$ і $G_k = \{a_i | a_i > a_k, i < k\}$. Доведіть, що $\sum_{k=1}^{n} |F_k| = \sum_{k=1}^{n} |G_k|$.

2. Дано натуральні числа m, n, $S = \{1, 2, \cdots, n\}$. Скільки існує послідовностей з m підмножин $T_1, T_2, \cdots, T_m \subseteq S$ таких, що $T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_m = S$?

3. Нехай $m, n > 1$ – натуральні числа, S – множина з n елементів, $A_1, A_2, \cdots, A_m \subset S$. Відомо, що для будь-якої пари елементів x, y з S існує така можина A_i, що або $x \in A_i, y \notin A_i$ або $y \in A_i, x \notin A_i$. Доведіть, що $2^m \ge n$.

4. В таблиці 2010×2010 кожна клітинка пофарбована в один з чотирьох кольорів. Розфарбовка називається *гармонічною* якщо кожен квадрат 2×2 містить клітинки усіх 4 кольорів. Знайдіть кількість варіантів гармонічних розфарбовок.

5. Доведіть, що кількість варіантів розбиття натурального числа n на різні натуральні доданки дорівнює кількості розбиття n на непарні доданки.

6. Є b хлопців та g дівчат, $g \ge 2b - 1$. Кожен хлопець запрошує одну з дівчат на танок. Доведіть, що це можливо зробити таким чином, щоб кожен хлопець танцював з дівчиною яку він знає або усі дівчата яких він знає не танцювали.

7. Нехай k – натуральне число. В певній компанії діє наступна акція: кожен, хто придбав сомбреро може привести рівно двох інших покупців, що ще не придбали його. Якщо кожен з них сприяв тому, що ще не менше ніж k нових людей придбали сомбреро, то цей покупець отримує інструкцію з використання. Доведіть, що якщо всього n людей придбали сомбреро, то не більше ніж $\frac{n}{k+2}$ з них отримали інструкцію з використання.

8. Дана таблиця $m \times n$. *Шляхом* називається послідовність клітинок у якій кожні дві послідовні клітинки є сусідніми. Кожна клітинка таблиці пофарбована в чорний або білий колір. Нехай N – кількість розфарбовок таблиці так, щоб існував шлях з правої сторони до лівої, що складається лише з чорних клітинок. Нехай M – кількість розфарбовок таблиці так, щоб існувало принаймні два таких шляха, що не мають спільних клітинок. Доведіть, що $N^2 \ge 2^{mn} M$.

9. Для кожного натурального n знайдіть кількість перестановок $a_1, a_2, \cdots, a_n$ чисел $1, 2, \cdots, n$ таких, що $2(a_1 + \cdots + a_k)$ ділиться на k для кожного $1 \le k \le n$.

10. Для натуральних m, n нехай $f(n, m)$ – кількість послідовностей $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ з n цілих чисел, що задовольняють умову $|x_1| + \cdots + |x_n| \le m$. Доведіть, що $f(m, n) = f(n, m)$.

11. Нехай $f(a, b, c)$ – це кількість способів заповнення кожної клітинки таблиці $a \times b$ числом з множини $\{1, 2, \cdots, c\}$ так, щоб кожне число в таблиці було не менше за числа, що знаходяться в нижній та лівій сусідніх клітинках. Доведіть, що $f(a, b, c) = f(c - 1, a, b + 1)$.

12. Перестановка π чисел $1, 2, \cdots, 2n$ має властивість P якщо $|\pi(i) - \pi(i + 1)| = n$ для деякого i. Доведіть, що для будь-якого натурального n перестановок, що мають властивість P більше ніж тих, що її не мають.

13. Нехай S – множина з n елементів і нехай $A_1, A_2, \cdots, A_k$ – k різних підмножин S. Доведіть, що кількість підмножин S, що не містять жодної з множин A_i більша або дорівнює $2^n \prod_{i=1}^{k} (1 - \frac{1}{2^{|A_i|}}$.

14. Нехай n – натуральне число і $S = \{a_1 = 1, a_2, \cdots, a_m\}$ – множина натуральних чисел. Доведіть, що існує натуральне число $n \le m$ і множина натуральних чисел $T = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ така, що:
а). Усі підмножини T мають різну суму елементів.
б). Серед цих сум зустрічаються числа $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

15. Нехай n, d – натуральні числа, причому n ділиться на d. Розглянемо усі такі послідовності $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ з n чисел, що задовольняють умову $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq n$ і $x_1 + \cdots + x_n$ ділиться на d. Доведіть, що рівно половина таких послідовностей задовольняє умову $x_n = n$.