Графи(Домашка 4)

Теорія(повторение)

Рассмотрим любое конечное множество (совокупность, группу) каких-либо элементов, например точек, людей и т. д. Это множество будет называться ***множеством вершин графа*** и обозначаться *V(G)*. Каждый элемент из *V(G)* называется ***вершиной графа***. Обычно вершины обозначают буквами $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ или цифрами $\{1, 2, ..., \text{n}\}$, но возможны и другие обозначения.
Количество *n* вершин графа называется его ***порядком***. Любую пару элементов из *V(G)* назовем ***ребром графа***, а множество ребер обозначим *E(G)*. Таким образом**, *граф*** — *это множество вершин V(G) и множество некоторых пар вершин, т. е. множество ребер E(G).* Две вершины, образующие ребро, называются ***смежными***. В этом случае будем говорить, что *вершины соединены ребром.* Два ребра называются *смежными,* если они имеют общую вершину. Число ребер, выходящих из вершины V, называется ***степенью вершины.***

Лемма о рукопожатиях. *Сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу ребер.*

Два графа G_1 и G_2 называются ***изоморфными***, если можно пронумеровать вершины каждого из них так, что если две вершины будут смежны в одном из графов, то вершины с такими же номерами будут смежны во втором.
Граф называется ***полным***, если любая пара его вершин соединена ребром. Полный граф с *n* вершинами обозначается K_n . Такой граф имеет *n (n* - 1)/2 ребер.
Граф называется ***двудольным***, если его вершины можно разбить на две части *(доли)* так, что каждое ребро будет соединять вершины разных частей. Двудольный граф называется ***полным двудольным***, если каждая вершина одной доли соединена с каждой вершиной другой.
Полный двудольный граф, доли которого состоят *из p и q* вершин, обозначается $K_{p,q}$. Граф называется ***связным***, если от каждой его вершины можно по ребрам перейти к любой другой вершине. Если это сделать невозможно, то граф называется ***несвязным***.
Говорят, что две вершины графа принадлежат одной ***компоненте***, если от одной вершины можно перейти к другой по ребрам графа. Если этого сделать нельзя, то вершины принадлежат разным компонентам. Граф ***H***, вершины и ребра которого принадлежат графу ***G***, называется ***подграфом графа*** **G.**
Цепью называется путь по вершинам и ребрам графа, который каждое ребро графа содержит не более одного раза. ***Циклом*** называется цепь, начальная и конечная вершины которой совпадают. Если в цепи или цикле не повторяются вершины, то это будут соответственно ***простая цепь*** или ***простой цикл***.
Дерево **—** это связный ациклический граф.
Эйлеровым циклом называется цикл, содержащий все ребра графа. Связный граф, содержащий эйлеров цикл, называется ***эйлеровым графом***.

<u>Теорема Эйлера (1736 г.).</u> *Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степень каждой вершины его четная.*

Задачі

<u>Вправа.</u> *«Лемма о хороводах».* В некоторой компании каждый человек имеет ровно двух друзей. Докажите, что если все друзья возьмутся за руки, то они образуют один или несколько хороводов.

1. В стране больше 101 города. Столица соединена авиалиниями со 100 городами, а каждый город, кроме столицы, соединён ровно с десятью городами (авиалиния действует в обе стороны). Известно, что из любого города можно попасть в любой другой (может быть, с пересадками). Доказать, что можно закрыть половину авиалиний, идущих из столицы, так что возможность попасть из любого города в любой сохранится.

2. Докажите, что в дереве на N вершинах ровно N-1 ребро.

3. Докажите, что в любом связном графе G на N вершинах (N-количество ребер) с m ребрами (m- количество ребер в графе), где (m>N-1), можна удалить (m-N+1) ребер так, чтобы граф который получится был деревом.

4. А) Все вершины графа покрашены в черный и белый цвета так, что любое ребро соединяет две вершины разных цветов. Докажите, что в этом графе нет цыклов нечетной длины. Б) В графе нет цыклов нечетной длины. Докажите, что он двудольный.

5. Антон хочет расставить 239 шахматных коней в клетках доски 100х100 так, чтобы каждый из них бил ровно трех. Удастся ли ему это сделать?

6. Докажите, что связный граф с 2n нечётными вершинами можно нарисовать, оторвав карандаш от бумаги ровно n–1 раз и не проводя никакое ребро дважды.

7. В стране из каждого города выходит по 3 железные дороги. Две компании хотят их все приватизировать. Антимонопольный комитет требует, чтобы из каждого города выходили дороги обеих компаний. Доказать, что компании могут договориться между собой, чтобы требование Антимонопольного комитета было выполнено.

8. Дан связный граф G с k рёбрами. Доказать, что можно занумеровать рёбра всеми числами 1, 2, …, k так, что для каждой вершины степени не меньшей двух, набор чисел, которыми помечены рёбра из этой вершины, имеет НОД, равный 1.
9. В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать в каждом городе, совершив не более: а). 198 перелётов; б) 196 перелётов.

10. В классе 20 учеников. На уроке математики каждый ученик дал подзатыльник не менее, чем 10 другим. Докажите, что какие-то двое дали подзатыльник друг другу.

11. Слава по одной перерезает веревочки волейбольной сетки, имеющей вид прямогульника $m \times n$. Какое наибольшее число веревочек может он разрезать до того, как сетка распадется на куски.