Домашнее задание 19.04.14

1 Сопряженные числа

1. Пускай a, b, d — целые и d — не полный квадрат. Докажите, что, если число $a + b\sqrt{d}$ — корень многочлена с целыми коэффициентами, то и сопряжённое к этому числу тоже корень этого многочлена.
2. Какое из чисел больше: $\sqrt{1979} + \sqrt{1980}$ или $\sqrt{1978} + \sqrt{1981}$.
3. Докажите, что для любых натуральных n, k число
$$\left[\frac{(2k+1+\sqrt{4k^2+1})^n}{2^n}\right]$$
делится на k.
4. Пускай $d \neq x^2$ при любом натуральном x. Докажите, что найдётся такое α, что для любых натуральных m, n выполняется неравенство
$$\frac{n}{m} - \sqrt{d} \geq \frac{1}{\alpha m^2}.$$
5. Докажите, что уравнение
$$x^2 - 3y^2 = 1$$
имеет бесконечно много решени в целых числах.
6. Придумайте такой многочлен с целыми коэффициентами, что $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ — его корень.
7. Докажите, что можно избавиться от иррациональности в знаменателе, который представляет собой сумму квадратных корней из нескольких рациональных чисел.
8. Назовём числа вида $\sqrt{a + b\sqrt{2}}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, белыми, а числа вида $\sqrt{a + b\sqrt{7}}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$. Может ли чёрное число равняться сумме белых?
9. Дано число
$$A = \left(\frac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}\right)^m,$$
где m, n — натуральные числа, большие 2. Докажите, что найдётся такое натуральное k, что
$$A = \frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}.$$

2 Старое

1. О графе G известно, что для любого подмножества его вершин D количество вершин, соединённых ребром хотя бы с одной вершиной из D не меньше, чем $|D|$. Докажите, что из этого графа можно выбросить не больше $\frac{|G|}{3}$ вершин так, чтобы все остальные можно было разбить на пары смежных.