Застосування інверсії

Помещаем в заданную точку пустыни клетку, входим в нее и запираем изнутри. Производим инверсию пространства по отношению к клетке. Теперь лев внутри клетки, а мы - снаружи.

Г. Петард

Вона працює.

Передвиборча агітація

Для вдалого застосування інверсії необхідно пам'ятати:

- Коло, що проходить через центр інверсії переходить в пряму, що не проходить через центр інверсії.
- Пряма, що не проходить через центр інверсії переходить в коло, що проходить чере центр інверсії.
- Пряма, що проходить через центр інверсії переходить в себе.
- Якщо об'єкт (пряма або коло) дотикається до інших об'єктів, то після інверсії образ цього об'єкта дотикається до образів інших.

Вправа 1. Коло ω дотикається до кола γ та його хорди AB. Доведіть, що пряма, яка сполучає точки дотику γ з ω і ω з AB проходить через середину дуги AB кола γ, де немає точки дотику γ з ω.

Задача 1. Нехай p — півпериметр трикутника ABC. Точки E та F на AB такі, що $CE = CF = p$. Доведіть, що описане коло трикутника AFE дотикається до зовнівписаного кола триктника ABC, яке дотикається до сторони AB.

Задача 2. Коло ω дотикається до сторін AB та AC трикутника ABC, а також до його описаного кола в точці K (**напіввписане коло**). Зовнівписане коло дотикається до сторони BC в точці N. Доведіть, що $\angle BAK = \angle CAN$.

Задача 3. Нехай C_0, A_0, B_0 — середини сторін AB, BC, AC трикутника ABC відповідно. Через O позначимо центр описаного кола трикутника ABC. Описані кола трикутників ABO та $A_0B_0C_0$ перетинаються в точках P та Q. Доведіть, що $\angle ACP = \angle BCQ$.

Задача 4. Хорда XY описаного кола ω трикутника ABC паралельна BC та розташована між точкою A та стороною BC. Кола γ_1 та γ_2 дотикаються до цієї хорди, кола ω та сторін AB та AC відповідно, причому вони розташовані між прямими BC та XY. Доведіть, що спільні внутрішні дотичні цих кіл перетинаються на бісектрисі кута A.

Задача 5. Нехай O — центр описаного кола гострокутного трикутника ABC. На відрізках OB і OC вибрали точки E та F відповідно так, що $BE = OF$. Позначимо через M і N середини дуг AOE і AOF описаних кіл трикутників AOE і AOF відповідно. Доведіть, що $\angle ENO + \angle FMO = 2\angle BAC$.

Задача 6. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло ω. Прямі AB та CD перетинаються в точці P, прямі BC та AD — в точці Q, а діагоналі AC та BD — в точці R. Нехай M — середина відрізка PQ,і нехай K — спільна точка відрізка MR та кола ω. Доведіть, що описане коло трикутника KPQ та ω дотикаються.

Задача 7. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло з центром O. Діагоналі AC та BD перетинаються в точці P. Нехай M та N — середини дуг AB та CD описаних кіл трикутників ABO та CDO, які не містять O. Доведіть, що M, N, P лежать на одній прямій.

Задача 8. В трикутник ABC вписано коло ω з центром I. Описане коло Γ трикутника AIB перетинає ω в точках X та Y. Спільні дотичні до Γ та ω перетинаються в Z. Доведіть, що описане коло трикутника XYZ дотикається до описаного кола трикутника ABC.

Задача 9. Всередині вписаного чотирикутника $ABCD$ відмічена точка P, така що $\angle PBC = \angle PDA$ і $\angle PCB = \angle PAD$. Доведіть, що існує коло, яке дотикається до прямих AB і CD, а також до описаних кіл трикутників ABP і CDP.

Задача 10. В гострокутному трикутнику ABC проведена бісектриса AA_1, M — її середина. На відрізках BM та CM існують точки P і Q відповідно, такі що кути APC та AQB прямі. Доведіть, що чотирикутник MPA_1Q вписаний.

Додому

Задача 1. Нехай ω — коло з діаметром PQ. Коло γ дотикається до ω внутрішнім чином та да PQ в точці C. Точка A на ω та B на відрізку CQ такі що Нехай AB — дотична до γ, причому $PQ \perp AB$. Доведіть, що AC — бісектриса $\angle PAB$.

Задача 2. Нехай Γ — описане коло трикутника ABC. Коло з центром в точці O дотикається сторони BC в точці P і дуги BC, яка не містить вершину A, в точці Q. Доведіть, що, якщо точка O належить бісектрисі кута A, то $\angle BAP = \angle CAQ$.

Задача 3. В кути B та C вписано кола ω та γ з центрами P та Q відповідно. Відомо, що ω та γ лежать всередині трикутника ABC, а також, що $\angle BAQ = \angle CAP$. Доведіть, що коло, яке дотикається до ω та γ зовнішнім чином та проходить через точку A, дотикається також до описаного кола ABC.

Задача 4. Нехай M та N — середини дуг BC описаного кола триктника ABC. З вершини B проведена висота BH. Точка K на прямій AN вибрана таким чином, що $\angle KMH = 90°$. Доведіть, що $BN = BK$.

Задача 5. Дано нерівнобедреный трикутник ABC. Нехай N — середина дуги BAC його описаного кола, а M — середина сторони BC. Позначимо через I_1 та I_2 центри вписаних кіл трикутників ABM и ACM відповідно. Доведіть, що точки I_1, I_2, A, N лежать на одному колі.

Задача 6. Два кола з радіусами, що дорівнюють 1 перетинаються в точках X та Y, причому відстань між ними теж 1. З точки C одного з кіл проведені дотичні до CA та CB до другого кола, які вдруге перетинають перше коло в точках A_1 та B_1. Прямі AA_1 та BB_1 перетинаються в точці Z. Знайдіть кут XZY.