Принцип крайнего

1) Из точки, лежащей внутри выпуклого многоугольника, опустили перпендикуляры на прямые, содержащие его стороны. Докажите, что основание одного из этих перпендикуляров лежит на стороне, а не на продолжении.
2)Про конечное множество точек известно, что для любых двух точек этого множества прямая, проходящая через них, содержит ещё хотя бы одну точку этого множества. Доказать, что все точки лежат на одной прямой.
3) Аналогичное утверждение про прямые.
4) Про конечное множество точек известно, что для любых трех точек этого множества найдется четвертая, которая дополнит эту тройку до параллелограмма. Доказать, что точек ровно 4.
5) На прямой расположены 2k-1 белый и 2k-1 черный отрезок. Известно, что любой белый отрезок пересекается хотя бы с k черными, а любой черный – хотя бы с k белыми. Доказать, что найдутся черный отрезок, пересекающийся со всеми белыми, и белый отрезок, пересекающийся со всеми черными.

Индукция

6) Доказать, что набор из n точек, не лежащих на одной прямой, задает не меньше n прямых, каждая из которых содержит не меньше двух точек из набора. (использовать задачу 2 из темы принцип крайнего и индукцию)
7) На сколько частей делят плоскость n прямых общего положения?
8) Плоскость разбита на части конечным набором прямых. Докажите, что эти части можно покрасить в два цвета так, чтобы у частей одного цвета не было общих сторон.

9) Лемма Шпернера. (четность)
Вершины треугольника отмечены числами 0, 1, 2. Этот треугольник разбит на несколько треугольников таким образом, что никакая вершина одного треугольника не лежит на стороне другого. Вершинам исходного треугольника оставлены старые пометки, а дополнительные точки получают номера 0, 1, 2 , причем любая точка, которая лежит на стороне исходного треугольника имеет тот же номер, что и одна из вершин этой стороны. Докажите, что в разбиении есть треугольник, у которого все вершины имеют разные номера.

Неравенства

10. Один выпуклый многоугольник лежит внутри другого. Докажите, что периметр внутреннего многоугольника меньше, чем периметр внешнего.
11. Пусть А – сумма попарных расстояний между точками некоторого конечного множества, в котором точек четное количество. Половину точек закрыли и посчитали новую сумму попарных расстояний - В. Докажите, что А>=2В.
12. На плоскости отмечено 6 красных, 6 синих и 6 зеленых точек, причем никакие три из отмеченных точек не лежат на одной прямой. Докажите, что сумма площадей треугольников с вершинами одного цвета составляет не более четверти суммы площадей всех треугольников с отмеченными вершинами.

Задачи на вспомогательные раскраски:

1) На клетчатой плоскости отметили n клеток. Докажите, что можно выбрать n/4 отмеченных клеток, у которых нет общих точек.
2) Центры некоторых клеток квадрата со стороной 15 соединили отрезками так, что получилась замкнутая ломаная без самопересечений, симметричная относительно главной диагонали. Докажите, что длина ломаной не больше 200.

Решение: Раскрасим клетки квадрата в шахматном порядке. Тогда соседние вершины ломаной будут центрами клеток разных цветов, вершин каждого цвета в ломаной поровну. Поскольку ломаная без самопересечений, то ось симметрии она пересекает ровно два раза. То есть, если диагональ покрашена в черный цвет, то ломаная не проходит через 13 клеток этой диагонали. Тогда она не проходит хотя бы через 12 белых клеток, а значит, задевает не больше 200 клеток.

Запасные задачи:

1) Let n be an integer greater than 1. Suppose $2n$ points are given in the plane, no three of which are collinear. Suppose n of the given $2n$ points are colored blue and the other n colored red. A line in the plane is called a *balancing line* if it passes through one blue and one red point and, for each side of the line, the number of blue points on that side is equal to the number of red points on the same side. Prove that there exist at least two balancing lines.

2)* A circle is divided into 432 congruent arcs by 432 points. The points are colored in four colors such that some 108 points are colored Red, some 108 points are colored Green, some 108 points are colored Blue, and the remaining 108 points are colored Yellow. Prove that one can choose three points of each color in such a way that the four triangles formed by the chosen points of the same color are congruent.

3) A rectangle D is partitioned in several (≥ 2) rectangles with sides parallel to those of D. Given that any line parallel to one of the sides of D, and having common points with the interior of D, also has common interior points with the interior of at least one rectangle of the partition; prove that there is at least one rectangle of the partition having no common points with D's boundary.

4) Around a circular table sit 12 people, and on the table there are 28 vases. Two people can see each other, if and only if there is no vase lined with them. Prove that there are at least two people who can be seen.