

Функційні рівняння—1

Із усіх наук я більше всього люблю математику, оскільки в цій науці повністю відсутнє лицемірство, яке я найбільше ненавиджу.

Стендаль

Розв'язати функційні рівняння:

1. $xf(x) + 2f(-\frac{1}{x}) = 3 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. $f(x) + f(\frac{x-1}{x}) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
3. $f(x + f(y)) = x + y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
4. $f(x + y) - f(x - y) = 4xy \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
5. $f(x + y) + f(x - y) = 2x^2 + 2y^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
6. $f(x + y) = xy \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
7. $f(x^2 + y) = f(x) + f(y^2) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
8. $f(x + y) = f(f(x)) + y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Означення. Функція $f: A \rightarrow B$ називається сюр'єктивною, якщо

$$\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y.$$

9. $f\left(\frac{x^2}{2} + x\right) = (x + 1)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
10. $f(xf(x) + f(y)) = x + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
11. $f(xf(y) + y) = x + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
12. $f(x)f(y) = f(x - y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
13. $f(x + f(y)) = y^2 + f(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.