1. Нехай P — многочлен із цілими коефіцієнтами без кратних коренів. Доведіть, що для кожного натурального r знайдеться натуральне n таке, що у розклад $P(n)$ на прості множники принаймні r простих чисел входять у степені 1.

2 Доведіть, що для довільного простого $p \geq 3$ кількість натуральних чисел n, для яких $p \mid n!+1$, не перевищує $cp^{2/3}$, де c - константа, яка не залежить від p.

3. Can an infinite set S of natural numbers be found, such that for all 3-element subsets (a, b, c) of S we have $abc+1$ perfect square ?

4 Про многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами известно, что $P(0)=0$ и НОД$(P(0), P(1), P(2), \dots)=1$. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n, для каждого из которых НОД$(P(n)-P(0), P(n+1)-P(1), P(n+2)-P(2), \dots)=n$.

5. Даны натуральные числа $m, n>1$. Докажите, что уравнение

$$(x+1)^n+(x+2)^n+\ldots+(x+m)^n = (y+1)^{2n}+(y+2)^{2n}+\ldots+(y+m)^{2n}$$

имеет лишь конечное количество решений в натуральных числах x, y.

6 Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами степени не меньше 1. Докажите, что не существует функции $T: Z \to Z$, для которой при любом натуральном n количество решений уравнения $T^n(x)=x$, где $T^n(x)=T(T(\ldots T(x)\ldots))$ -всего n итераций, равно $P(n)$.

7. For a nonnegative integer n define $\operatorname{rad}(n)=1$ if $n=0$ or $n=1$ and $\operatorname{rad}(n)=p_1p_2\cdots p_k$ where $p_1<p_2<\cdots<p_k$ are all prime factors of n. Find all polynomials $f(x)$ with nonnegative integer coefficients such that $\operatorname{rad}(f(n))$ divides $\operatorname{rad}(f(n^{\operatorname{rad}(n)}))$ for every nonnegative integer n.

8. Нехай P - многочлен із цілими коефіцієнтами, $\deg P=n$. Доведіть, що рівняння $P\big(P(x)\big)=x$ має не більш ніж n розв'язків у цілих числах.

9. Нехай f - многочлен із цілими коефіцієнтами, $f(0)=0, f(1)=1$. Припустимо, що для деякого простого числа p значення f у цілих точках дають остачу 0 або 1 при діленні на p. Доведіть, що степінь f не менший за p-1.